



TÉCNICO SUPERIOR UNIVERSITARIO EN MECÁNICA ÁREA INDUSTRIAL

# Manual de Resistencia de Materiales

CUERPO COLEGIADO DE DIRECTORES Y PROFESORES

Agosto 2017

# TEMA 1 TRACCIÓN, COMPRESIÓN Y ESFUERZO CORTANTE.

## INTRODUCCIÓN

La construcción de una nueva máquina se realiza bien por su necesidad actual bien por su necesidad futura.

El proceso de construcción de una máquina puede descomponerse en cuatro fases:

Diseño en el que se lleva a cabo la concepción de la máquina capaz de adaptarse en principio a las exigencias que se le plantean. Es una fase creativa en la que el ingenio y la experiencia son precisos. Es quizás la fase más ilusionante del proceso pues el autor/es responden al reto que se les ha presentado.

Proyecto en el que se realizan los cálculos y dimensionamientos precisos que permiten el funcionamiento continuado y sin problemas de la máquina. Es la fase más técnica ya que en ella se aplican un conjunto de normas y métodos, adquiridos mediante el estudio y la experiencia. En esta fase al autor/es se les exige una formación integral en los aspectos técnicos y agronómicos que deben caracterizarle.

Construcción en esta fase una vez terminado el diseño y realizados los cálculos necesarios para un funcionamiento racional de la máquina se procede a la construcción de la misma. Para que esta fase se desarrolle de forma adecuada es preciso que el autor tenga además de una buena formación en cuanto a materiales y a sus características de uso un elevado nivel de conocimientos de tecnología de taller, de las máquinas herramientas y de su utilización correcta.

Ensayo con el se hace una comprobación de los principios usados en la concepción de la máquina, de los materiales seleccionados en su construcción, de su funcionamiento y de las características de su funcionamiento.

Es interesante señalar que la idea concebida inicialmente en la mayoría de los casos es muy distinta del modelo construido pues al realizar el proyecto surgen condicionantes diversas que originan modificaciones y perfeccionamientos que hacen incluso aparecer varias soluciones. Imperativos normalmente económicos y de tiempo obligan a adoptar la solución que parezca más preferible.

El diseño de una máquina consiste en la aplicación de una combinación de principios científicos y experimentales que rara vez aportan soluciones correctas al primer intento, lo que pone al proyectista en situaciones incómodas, y es que la concepción de una máquina al igual que puede ofrecer cotas de satisfacción inenarrables puede ser causa de profundas decepciones. Quizás es esta una de las causas del interés que los ingenieros muestran por este tipo de trabajos.

Para ser un buen proyectista de máquinas es preciso conocer:

- La resistencia de materiales para que sus análisis sean irreprochables.
- Las propiedades de los materiales empleados para la construcción de los elementos de las máquinas.
- Los procesos de fabricación.
- Las ofertas del mercado (catálogos, precios,...).
- Las condiciones de trabajo de las máquinas a diseñar.

Además es preciso tener :

- Sentido estético.
- Conocimientos de economía y de cálculo de costes de funcionamiento de las máquinas.
- Capacidad inventiva.
- Intuición creadora.
- Juicio.
- Sensibilidad
- Capacidad de predicción.

En general la idea que se tiene de un inventor es la de que pone en juego su imaginación y crea un nuevo diseño. Esto es cierto pero es conveniente saber que para crear una máquina se hace uso de ideas ya conocidas a las que se saca provecho.

Es importante señalar antes de terminar este apartado de introducción que para llegar a una determinada máquina hay un auténtico proceso de evolución en el que de forma paulatina y ordenada, respondiendo a las necesidades surgidas con el uso, se producen mejoras que constituyen avances.

A modo de consejo una referencia a una máxima muy antigua pero de gran valor para el ingeniero proyectista "*si la teoría y la práctica no concuerdan, es que hay algún error*"

Por último, una aclaración de gran interés profesional para el proyectista de máquinas: El proyecto de máquinas incumbe al Ingeniero ya que por sus principios, por sus aplicaciones y por su campo de trabajo es el profesional mas cualificado para un diseño adecuado. Este juicio, contrario a otros sesgados en sus principios, debe estar presente en cuantas personas cursen esta materia en una escuela de Ingeniería, para de esta forma impedir la invasión de profesionales advenedizos que existen en esta profesión.

## ESFUERZO NORMAL Y DEFORMACIÓN

Son ambos dos conceptos fundamentales que pueden entenderse con el siguiente ejemplo. Sea una *barra prismática* cargada con fuerzas axiales  $F$  en sus extremos según aparece en la figura siguiente.

Una *barra prismática* es un elemento con multitud de aplicaciones en máquinas que se caracteriza por presentar una *sección transversal constante* en toda su longitud.

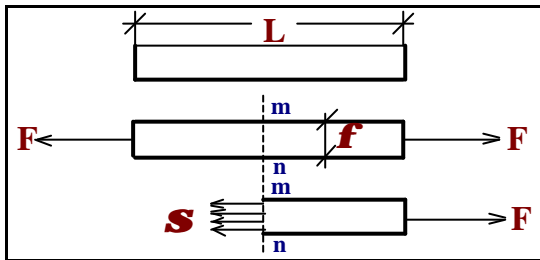


Figura 1.- Barra prismática sometida a tensión

En el caso que nos ocupa dicha barra se dice que está sometida a una *tensión* por el hecho de que las *fuerzas axiales* producen en ella una *deformación*.

Para analizar las acciones internas que aparecen en la barra prismática originados por las fuerzas axiales se considera la sección que aparece al efectuar un corte imaginario en la sección  $mn$  perpendicular al eje longitudinal de la barra. A esta sección se le denomina *sección transversal*. Se separa la porción de la barra situada a la derecha del corte considerándola un cuerpo libre.

La carga  $F$  actúa en el extremo derecho, mientras que en el lado izquierdo se aparecen fuerzas que se distribuyen de manera continua sobre la sección transversal que sustituyen a la acción sobre el tramo izquierdo de la barra prismática.

La *intensidad de la fuerza*, o lo que es lo mismo la fuerza por unidad de superficie se denomina

*esfuerzo, fatiga o tensión* y se denota por la letra griega  $\sigma$  (sigma).

Si se supone, lo cual es lógico, que el esfuerzo tiene una distribución uniforme sobre la sección transversal, es evidente que si  $A$  es el área de la sección transversal se tendrá que :

$$s = \frac{F}{A}$$

Ecuación que representa el esfuerzo, fatiga o tensión uniforme en una barra prismática de sección transversal con forma cualquiera cargada axialmente.

Cuando la barra se tensa bajo la acción de las fuerzas  $F$ , los esfuerzos resultantes se denominan *tensiones de tracción*; si el sentido de las fuerzas se invierte se origina una compresión de la barra apareciendo los denominados *tensiones de compresión*.

Dado que  $\sigma$  actúa en dirección perpendicular a la superficie de corte se le conoce también como *esfuerzo normal o tensión normal*. Mas adelante se encontrara otro tipo de esfuerzos que actúan paralelos a la superficie de corte que se denominaran *esfuerzos cortantes*.

Tradicionalmente a las tensiones de tracción se les da signo positivo y a las de compresión signo negativo.

Las unidades de tensión, esfuerzo o fatiga normal  $\sigma$  son unidades de fuerza divididas por unidades de superficie. En el S.I. vendrá dado por  $N/m^2$  o Pascales. Sin embargo como el Pascal es una unidad tan pequeña se suele utilizar el Mpa (Megapascal) que equivale a  $10^6$  Pascales o  $1 N/mm^2$ . Es frecuente medir el esfuerzo normal en  $Kp/cm^2$  para ello  $F$  debe medirse en  $Kp$  y la superficie de la sección de corte en  $cm^2$ .

Para que la ecuación  $s = \frac{F}{A}$  sea correcta es imprescindible que  $\sigma$  esté uniformemente distribuido en la sección transversal a la barra. Esta condición solo se cumple cuando  $F$  esta aplicada en el c. de g. de la sección Cuando esto no ocurre se originan flexiones en la barra y el cálculo es más complejo como se verá mas adelante. Por ahora se considerará que  $F$  está aplicada en el centro de gravedad de la sección transversal y es normal a ella.

Una barra axialmente cargada sufre una variación en su longitud alargándose o acortándose según esté sometida a tracción o a compresión. Sea  $\delta$  la variación total de longitud y sea  $L$  la

longitud total de la barra y que esta es de material totalmente uniforme en toda su longitud. Se define *deformación unitaria*  $\epsilon$  a la relación:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

$\epsilon$  se denomina *deformación unitaria* a tracción o a compresión. En el primer caso significará un alargamiento de la barra y en el segundo un acortamiento de la misma.

Debido a que  $\delta$  y  $L$  son dos longitudes  $\epsilon$  es adimensional, aunque es frecuente medir  $\delta$  en mm. y  $L$  en m presentando  $\epsilon$  unidades de mm./m.

## DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las propiedades mecánicas de los materiales usuales en las máquinas se determinan realizando pruebas sobre muestras del material. Para realizar dichas pruebas se utilizan laboratorios de ensayo de materiales provistos del instrumental adecuado.

Para que los ensayos sean comparables el tamaño de las muestras y los métodos de ensayo están normalizados.

El ensayo más usual es la denominada prueba de tensión, mediante el cual se aplican cargas axiales a una probeta de dimensiones normalizadas conformada con los extremos de más diámetro para fijarlos a unas mordazas. Se mide continuamente el esfuerzo transmitido y el alargamiento de la probeta. Se usa modernamente, para efectuar las medidas, equipos de extensometría formados por una fuente de alimentación, un amplificador de señales producidas por sensores a base de bandas extensométricas y a veces un equipo informático que registra los valores.

Estos ensayos se denominan *pruebas estáticas* pues las cargas se aplican muy lentamente, ya que la forma de aplicación incide en la respuesta de los materiales.

El esfuerzo, fatiga o tensión axial  $\sigma$  se calcula como se vio anteriormente dividiendo la acción o carga entre el área de la sección transversal. Ocurre que al ir incrementando la carga la sección transversal disminuye por lo que el esfuerzo o tensión aumenta más de lo previsto ya que el área instantánea puede volverse mucho menor que el área inicial. Mas adelante veremos como se calcula la *tensión real*.

La deformación unitaria axial se determina a partir del alargamiento  $\delta$  dividido por la longitud de la

barra  $L$ . Si se emplea en el cálculo la longitud inicial de la barra se determina la *deformación unitaria nominal*, en cambio si se utiliza la longitud medida en cada instante se determina la *deformación unitaria real*.

Los ensayos de compresión se realizan sobre cilindros de sección circular.

Una vez realizada la prueba y tomado varias medidas a lo largo del ensayo se puede trazar el llamado diagrama *esfuerzo, fatiga o tensión-deformación*.

Estos diagramas fueron creados por Bernoulli y Poncelet y con ello se aprecia que cada material ofrece características propias que proporcionan una valiosa información sobre su comportamiento.

En la siguiente figura se representa el diagrama tensión - deformación de un acero, material típicamente utilizado en gran cantidad de aplicaciones agrícolas.

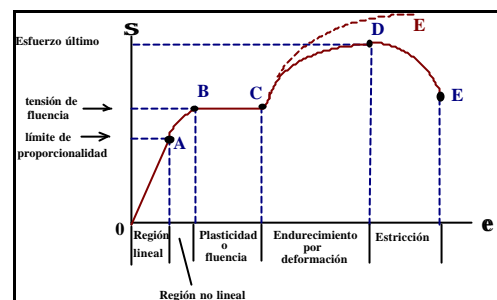


Figura 2.- Diagrama esfuerzo axial - deformación de acero de bajo contenido en carbono.

Se observa que el diagrama comienza con una línea recta desde O hasta A, que indica que en esta zona las deformaciones son directamente proporcionales a las tensiones, se dice que el material tiene un comportamiento lineal. A partir del punto A y hasta llegar a B el comportamiento no es lineal y se observa que las deformaciones crecen rápidamente con pequeños incrementos de tensión. El punto A se denomina *límite de proporcionalidad*.

En la zona AB la curva toma cada vez una pendiente más pequeña hasta llegar a B punto en el que la curva se vuelve prácticamente horizontal.

Entre B y C sin variar la tensión se producen notables incrementos de longitud. Este fenómeno se conoce con el nombre de *fluencia* y el valor de la tensión en C se denomina *tensión de fluencia*. En la zona BC el material se vuelve perfectamente *plástico*.

A partir de C aparece el denominado *endurecimiento por deformación* debido a que el material sufre cambios en su estructura cristalina. Así se observa hasta que se llega al punto

representado por D en el diagrama. El valor de la tensión en este punto se denomina *esfuerzo último*.

A partir de D el alargamiento posterior de la barra se acompaña de una reducción en la carga hasta que se llega al punto E del diagrama denominado *punto de fractura*. En el punto E en la barra se aprecia una importante contracción lateral con notable disminución de la sección transversal. Este fenómeno se conoce con el nombre de *estricción*.

El área utilizada para la obtención del diagrama anterior es el de la sección nominal. A lo largo del ensayo las reducciones de sección que aparecen son tan pequeñas que apenas hay variación entre la tensión nominal y la tensión real. En la zona de *endurecimiento por deformación* ( CD en la figura ) y en la de *estricción* las variaciones de sección son mas acusadas y si se representa en el diagrama la curva real de esfuerzo deformación la forma es como la que se presenta en la línea trazos.

Como se observa en el diagrama real el material en si sigue soportando carga pero la importante disminución de la sección origina la forma de la curva que parece indicar que deja de soportar carga cuando realmente no es así.

La figura siguiente representa a escala el diagrama tensión - deformación de un acero.

El análisis de este gráfico ofrece la siguiente información:

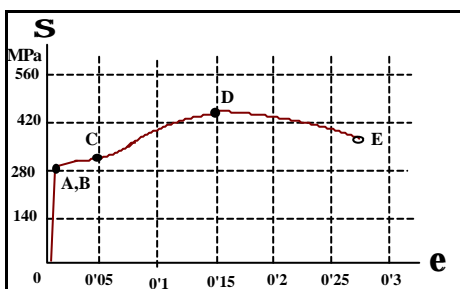


Figura 3 .- Diagrama tensión - deformación a escala de un acero de bajo contenido en carbono.

\* Las deformaciones de O hasta A son tan pequeñas que resultan prácticamente inapreciables con lo que la línea de unión es vertical.

\* La zona de fluencia aparece de forma súbita, pues en la gráfica el punto A coincide con el B.

\* Desde B hasta C aparece claramente una zona plástica. Cuando esta zona se presenta se dice que los materiales son *dúctiles* .

\* Desde C hasta D se aprecia claramente la zona de endurecimiento por deformación.

\* Desde D hasta E se aprecia claramente la zona de estricción.

Pero no todos los materiales se comportan de forma similar al acero bajo en carbono. Así por ejemplo el aluminio presenta un diagrama como el que se ofrece en la figura siguiente. En el se observa, al no existir el tramo BC, que el aluminio es un material poco dúctil.

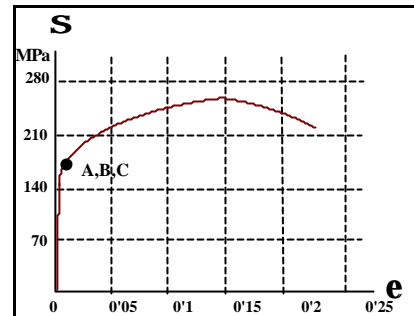


Figura 4 .- Diagrama tensión - deformación del aluminio.

En el diagrama característico del caucho se observa que desaparecen en su totalidad todas las zonas que se definieron anteriormente.

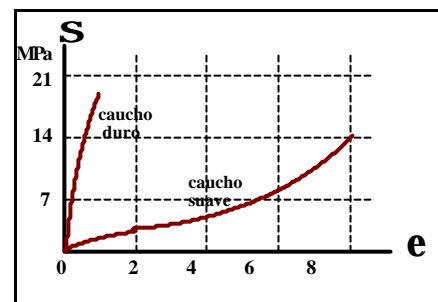


Figura 5 .- Diagrama tensión - deformación de dos tipos de caucho.

Se define *elongación* como el porcentaje de variación de la longitud que permite un determinado material antes de su rotura.

Su cálculo se realiza mediante la expresión :

$$\text{Elongación} = \frac{\text{Longitud en rotura} - \text{longitud inicial}}{\text{Longitud inicial}} \cdot 100$$

Los materiales cuya elongación es reducida se denominan *frágiles*, algunos ejemplos los constituyen el vidrio, el hormigón, el hierro fundido, los materiales cerámicos... y aquellos en los que es alta se denominan *dúctiles*.

Los diagramas tensión deformación en compresión tienen formas diferentes a los de tracción. Los materiales dúctiles en la zona de comportamiento lineal poseen límites de compresión muy próximos a los de tracción.

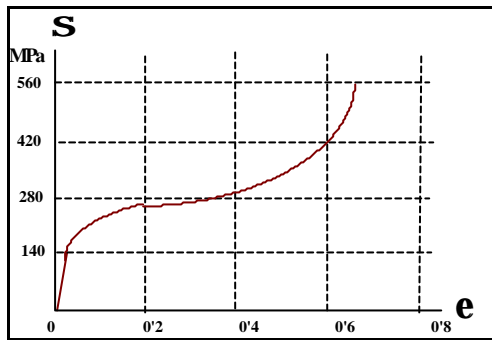


Figura 6 - Diagrama tensión - deformación del cobre a compresión.

Los materiales frágiles presentan un diagrama como el que se presenta en la figura siguiente:

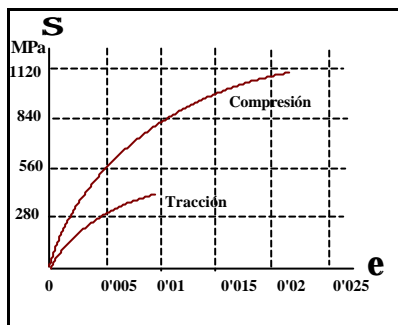


Figura 7 - Diagrama tensión deformación a compresión del hierro fundido.

Las tablas que se presentan al final del tema ofrecen algunas propiedades de materiales de interés para la construcción de máquinas.

## ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD.

Los diagramas tensión deformación permiten estudiar el comportamiento de un determinado material cuando se somete a la acción de una carga estática es decir de una carga que aumenta de forma muy lenta. La pregunta que cabe hacerse es la de qué sucede cuando la carga se retira lentamente y el material se descarga.

Supongamos que al aplicar una carga a un material la curva tensión - deformación que sigue es la que se presenta en la zona (a) de la figura siguiente. El diagrama sigue durante la carga la línea O - A - B - C. Si en un determinado ensayo se considera el material en la posición A y se retira lentamente la carga y el material sigue exactamente la misma curva para regresar a O, se dice entonces que el material es *elástico* y a esta propiedad se llama *elasticidad*.

La curva tensión-deformación no tiene porque ser lineal para que un material pueda ser elástico.

Si se supone el material en el punto B de la zona (b) figura siguiente al descargarlo el material

sigue la línea BD. Cuando alcanza el punto D, la carga ha desaparecido por completo pero en el material persiste una deformación que se denomina *alargamiento residual*.

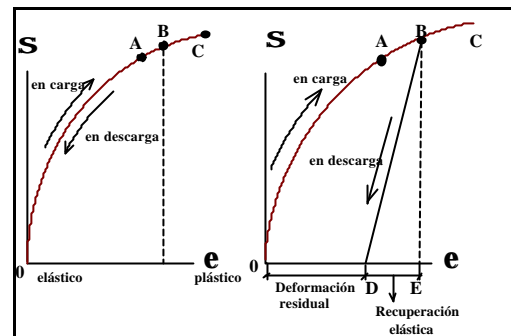


Figura 8 - Comportamiento elástico (a). Comportamiento parcialmente elástico (b)

De la deformación total OE una parte la DE se recuperó elásticamente mientras que la OD persiste de forma permanente. Es por ello que se dice que el material es *parcialmente elástico*.

Cuando una barra se somete a una carga relativamente pequeña aparece en ella un alargamiento. Si se retira la carga y la barra vuelve a su longitud inicial, se dice que esta trabajando en la zona elástica. Si se repite la acción incrementado progresivamente el valor de la carga se observa que llega un valor de la tensión a partir del cual la barra no vuelve a su longitud inicial. La tensión o esfuerzo a partir del cual la barra pierde su elasticidad se conoce con el nombre de *límite elástico* del material.

El *límite elástico* suele ser ligeramente superior o muy cercano al *límite de proporcionalidad*. Hay casos como el acero, en los que ambos valores prácticamente coinciden y otros, como el caucho en los que el límite elástico es mucho mas elevado que el límite de proporcionalidad.

La característica de un material que le permite soportar deformaciones inelásticas superiores al límite elástico se denomina *plasticidad* y en la curva tensión-deformación se manifiesta porque aparece una región elástica seguida de una plástica.

Cuando se dan grandes deformaciones en un *material dúctil* cargado en la *región plástica* se dice que el material experimenta un *flujó plástico*.

Al obtener la curva tensión - deformación, no se consideró el tiempo de duración de la carga aplicada. Ocurre que si la duración de la carga aplicada es suficientemente grande, y aparecen deformaciones permanentes que se mantienen al eliminar la acción, se dice que el material *fluye*. Este proceso se denomina *relajación* del material y

se da en general de forma importante a altas temperaturas.

### ELASTICIDAD LINEAL. LEY DE HOOKE

La mayoría de los materiales usados en la construcción de máquinas tienen una región inicial en el diagrama esfuerzo - deformación en la que se comporta de forma elástica lineal. Cuando esto ocurre se dice que el material es *linealmente elástico*.

Esta forma de comportamiento es sumamente importante para la construcción de máquinas ya que para su funcionamiento es preciso diseñarlas, proyectarlas y construir las de forma que las cargas no superen el límite elástico de las piezas, pues en caso contrario podrían aparecer deformaciones permanentes.

La elasticidad lineal se puede expresar analíticamente mediante la fórmula :

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Expresión en la que  $\sigma$  representa como anteriormente la tensión o esfuerzo axial,  $\epsilon$  la deformación unitaria y  $E$  una constante característica del material denominada módulo de elasticidad. El módulo de elasticidad  $E$  representa en el diagrama tensión-deformación la pendiente de la recta en la región linealmente elástica. Como  $\epsilon$  es adimensional y  $\sigma$  se mide en unidades de fuerza divididas por unidades de superficie el módulo de elasticidad se mide en las mismas unidades, es decir en Pascales, Megapascuales, Kp/cm<sup>2</sup>...

La ecuación  $\sigma = E \cdot \epsilon$  se denomina ley de Hooke y se aplica únicamente a tracción y compresión simples.

El módulo de elasticidad  $E$  que como se ha dicho representa la pendiente de la recta, tiene valores altos y se presenta, para distintos materiales, en las tablas anejas.

Es frecuente llamar al módulo de elasticidad módulo de Young.

Ocurre que cuando una barra prismática se somete a tracción el alargamiento axial va acompañado de una contracción lateral como aparece indicado en la figura siguiente.

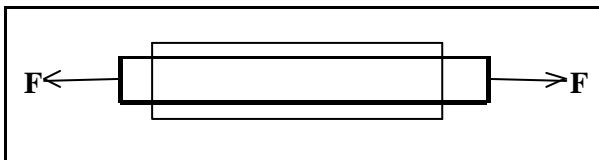


Figura 9.- Alargamiento axial y contracción lateral de una barra sometida a tracción.

Esta contracción lateral se aprecia fácilmente en algunos materiales como es el caso del caucho y difícilmente en otros como es el acero. Experimentalmente se puede demostrar que la *deformación unitaria lateral* es proporcional a la *deformación unitaria axial* cuando se trata de tensiones inferiores al límite elástico, es decir cuando la barra trabaja en la zona elástica lineal.

El cociente entre la *deformación unitaria lateral* y la *deformación unitaria axial* se denomina *relación o coeficiente de Poisson* y se representa por la letra griega  $\nu$ .

$$\nu = \frac{\text{def. unit. lateral}}{\text{def. unit. axial}}$$

En una barra sometida a tracción la deformación lateral representa una reducción de su anchura y la deformación axial un aumento de su longitud.

El valor de  $\nu$  toma valores de 0.25 a 0.35. En el caucho  $\nu$  llega a valores de hasta 0.5.

La conjunción de ambas deformaciones hace aparecer en las barras un cambio de volumen cuyo cálculo es como sigue:

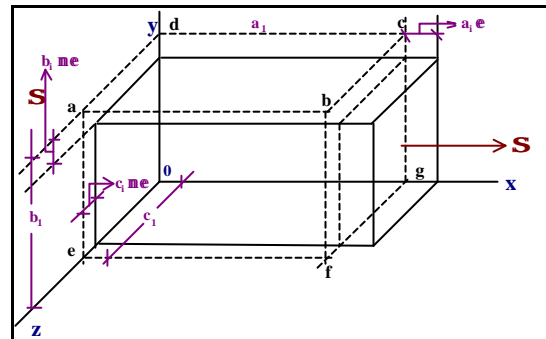


Figura 10.- Cambio de volumen de un elemento sometido a tracción.

La forma original abcdefgO con lados que miden  $a_1, b_1, c_1$  en las direcciones X, Y, Z respectivamente. La dimensión según el eje X sometida a tracción pasa a medir  $a_1 \cdot (1 + \epsilon)$ , la dimensión según el eje Y pasa después de contraerse a medir  $b_1 \cdot (1 - \nu \cdot \epsilon)$  y la dimensión según el eje Z tras contraerse pasa a medir  $c_1 \cdot (1 - \nu \cdot \epsilon)$ , por lo que el volumen final tendrá un valor dado por  $V_f = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot (1 + \epsilon - 2 \cdot \nu \cdot \epsilon)$  por lo que la variación de volumen vendrá dada por la expresión  $\Delta V = a_1 b_1 c_1 \cdot \epsilon \cdot (1 - 2 \cdot \nu)$ .

El cambio unitario de volumen  $\epsilon_v$  vendrá dado por

:

$$e = \frac{DV}{V}$$

Por lo que :

$$e = \epsilon(1 - 2\nu) = \frac{S}{E}(1 - 2\nu)$$

La magnitud  $e$  se denomina *deformación volumétrica*.

### ESFUERZO CORTANTE Y DEFORMACIÓN ANGULAR

Hasta ahora solo se han estudiado barras sometidas a esfuerzos axiales, los cuales actúan perpendicularmente a las secciones transversales a ellas. Otro tipo de esfuerzo o tensión se da cuando las cargas actúan paralelas a la superficie de la sección transversal y se denomina *esfuerzo cortante*.

Un claro ejemplo de elemento de máquina sometido a esfuerzo cortante es el que se presenta en el bulón de la figura siguiente:

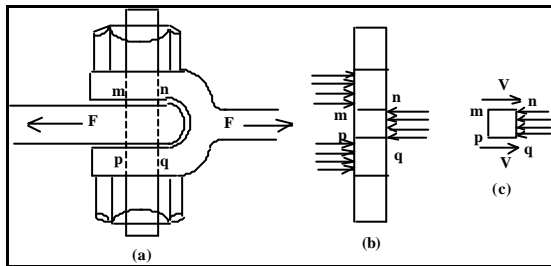


Figura 11 .- Elemento sometido a esfuerzo cortante.

Bajo la acción de las cargas  $F$  aparecen en el elemento tensiones o esfuerzos según se presenta en (b) de la figura anterior. Las tensiones o esfuerzos pueden ser sustituidos por cargas  $V$  de valor igual a  $F/2$ . Los esfuerzos o tensiones cortantes sobre la sección  $mn$  vienen dados por la fórmula :

$$\tau = \frac{V}{A}$$

Siendo  $\tau$  el denominado *esfuerzo cortante*,  $V = F/2$  y  $A$  la superficie de la sección transversal. Como  $V$  es una fuerza y  $A$  una superficie las unidades de los esfuerzos o tensiones cortantes son las mismas que las de las tensiones o esfuerzos axiales es decir Pascales en el S.I..

Es importante destacar que los esfuerzos cortantes no solo aparecen en elementos de máquinas con montajes sólo como los anteriores,

también aparecen en piezas sometidas a tracción, flexión, torsión ..., como se verá mas adelante.

Para obtener una idea clara de este importante concepto considérese el elemento de material de dimensiones  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  que se presenta en la figura siguiente.:

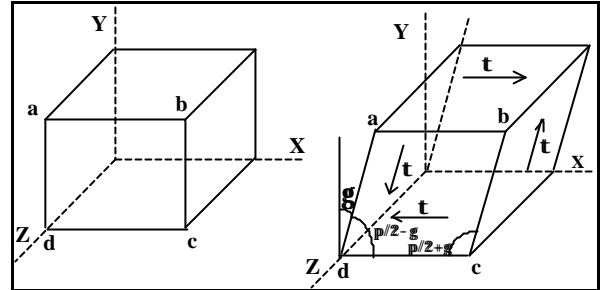


Figura 12 .- Esfuerzo cortante y deformación angular.

Si en las caras perpendiculares a los ejes  $XX$  y  $YY$  existe un esfuerzo cortante de valor  $\tau$ , el equilibrio según el eje  $XX$  obliga a que exista en cada par de caras paralelas el mismo esfuerzo cortante.

El valor de la fuerza en la cara superior será  $\tau \cdot \Delta X \cdot \Delta Z$  que estará equilibrada en la cara inferior con una fuerza de igual módulo pero de sentido contrario.

Estas dos fuerzas generan un par respecto al eje  $ZZ$  de valor  $\tau \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \Delta Z$ , por lo que la pieza no gire tiene que haber otro momento igual y de sentido contrario que evidentemente será el debido al esfuerzo cortante sobre las caras perpendiculares como las superficies son iguales los esfuerzos cortantes en caras perpendiculares son iguales.

Por ello se puede asegurar que los esfuerzos cortantes en caras paralelas y en caras perpendiculares son iguales.

Cuando en una sección solo actúan esfuerzos cortantes y no hay tensiones axiales se dice que se trata de un *esfuerzo cortante puro*.

Bajo la acción de esfuerzos cortantes los elementos se deforman dando lugar a *deformaciones angulares* o *deformaciones por cortante* como aparece en la figura anterior.

El ángulo en los vértices  $d$  y  $b$  toma por valor  $\pi/2 - \gamma$  y en los vértices  $a$  y  $c$  toma por valor  $\pi/2 + \gamma$ . El ángulo  $\gamma$  se denomina *deformación angular* y se mide en radianes.

Igual que se obtienen los diagramas tensión - deformación en piezas sometidas a cargas axiales,



también se obtienen diagramas esfuerzo cortante - deformación. Para ello se someten las barras a torsión.

Los diagramas que se obtienen son semejantes a los ya presentados.

El tramo inicial del diagrama esfuerzo cortante - deformación es una línea recta análoga a la del esfuerzo axial - deformación, por lo que, de forma semejante, puede establecerse la ley de Hooke para esfuerzo cortante, cuya expresión tiene la forma :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Expresión en la que  $\tau$  es el esfuerzo cortante en Pascal,  $\gamma$  es la deformación angular en radianes y  $G$  es el denominado *módulo de elasticidad a esfuerzo cortante* también llamado *módulo de rigidez*.

Las unidades de  $G$  son las mismas que las de  $E$ .

Los valores característicos de  $G$  en materiales de interés en la construcción de máquinas para la agricultura se presentan en tablas anejas al final de este tema.

La relación entre  $E$  y  $G$  se obtiene mediante la ecuación :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \Rightarrow G \approx \frac{E}{2}$$

Esta ecuación indica que los valores de  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  no son independientes sino que en cada material están interrelacionados. La obtención de esta ecuación se hará en el tema correspondiente a torsión.

## EFFECTO COLUMNA

Cuando una barra prismática trabaja a tracción sometida a una carga axial la fatiga, tensión o esfuerzo que se produce en ella se calcula mediante la expresión:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Siendo:

$\sigma$  = tensión.

$P$  = carga.

$A$  = sección transversal

Ocurre que, cuando la barra trabaja a compresión y es suficientemente esbelta, surgen tensiones mucho más elevadas y para su cálculo se utilizan ecuaciones empíricas como la de Euler, dada por:

$$F_{\max} = \frac{C \cdot P^2 \cdot E \cdot A}{(L_i)^2}$$

Siendo:

$F_{\max}$  = carga crítica.

$C$  = constante función del empotramiento de los extremos.

$E$  = módulo de elasticidad.

$A$  = sección transversal.

$L$  = longitud de la barra.

$i$  = radio de giro  $\sqrt{I/A}$

$I$  = momento de inercia de la sección transversal respecto al eje de flexión.

• En secciones circulares:  $i = \frac{\varnothing}{4}$  ( $\varnothing$  es el diámetro de la sección transversal).

• En secciones rectangulares:  $i = \frac{h \cdot \sqrt{3}}{6}$  ( $h$  es el lado más pequeño del rectángulo).

Cuando la esbeltez de la barra es reducida se aplica la fórmula empírica de Johnson, dada por:

$$F_{\max} = \sigma_y \cdot A \cdot \left[ 1 - \frac{\sigma_y \cdot (L/i)^2}{4 \cdot C \cdot P^2 \cdot E} \right]$$

Siendo:

$\sigma_y$  = límite de fluencia del material.

La constante  $C$  toma los valores que se presentan en la figura siguiente:

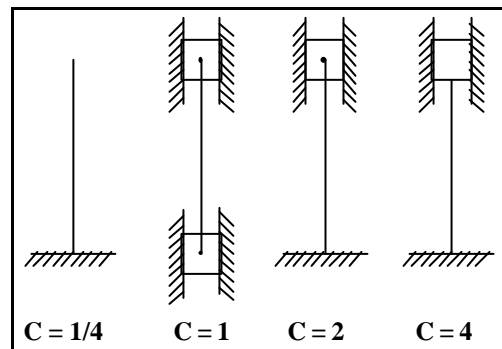


Figura 13.- Valor de  $C$  según características de montaje de las barras.

Para determinar el límite de esbeltez en el que se aplica la fórmula de Euler o la de Johnson se determina el valor de  $L/i$  que iguala las expresiones dadas, es decir:

$$\frac{C \cdot P^2 \cdot E \cdot A}{(L/i)^2} = s_y \cdot A \cdot \left[ 1 - \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{4 \cdot C \cdot P^2 \cdot E} \right]$$

Operando se tiene:

$$\boxed{L/i = \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}}}$$

• Si el valor de  $L/i < \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}}$  se usa la fórmula de Johnson.

• Si el valor de  $L/i > \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}}$  se usa la fórmula de Euler.

La fatiga que se produce en una barra sometida a una carga F viene dada por:

$$\boxed{s = \frac{F}{A} \cdot \alpha}$$

Siendo:

- F = carga que actúa.
- A = sección transversal de la barra.
- $\alpha$  = coeficiente de pandeo.

Según Euler:

$$\boxed{\alpha = \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{C \cdot P^2 \cdot E}}$$

Según Johnson:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{1 - \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{4 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}}}$$

El siguiente ejemplo permitirá aclarar los conceptos expuestos:

• Una columna de sección circular de 2 m de longitud y 5 cm de diámetro empotrada en la base y libre en el extremo se somete a una carga axial de compresión de 2000 Kp. Calcular la tensión

generada si se construye de acero de  $E = 2'1 \cdot 10^6$  Kp/cm<sup>2</sup> y  $s_y = 500$  MPa y la carga crítica.

Solución:



$$L = 200 \text{ cm}$$

$$i = \sqrt{I/A}$$

En este caso se vio que:

$$i = \frac{A}{4} \Rightarrow i = 1'25$$

$$\text{Esbeltez} = \frac{L}{i} = \frac{200}{1'25} = 160$$

$$\text{Para: } L/i < \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}} \Rightarrow \text{Johnson}$$

$$\text{Para: } L/i > \sqrt{\frac{2 \cdot C \cdot P^2 \cdot E}{s_y}} \Rightarrow \text{Euler}$$

Como:

$$E = 2'1 \cdot 10^6 \cdot 9'8 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^2 = 205800 \text{ MPa}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$s_y = 500 \text{ MPa}$$

Se tiene que:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot P^2 \cdot 20800}{500}} = 45$$

Como  $L/i > 45$   $\Rightarrow$  aplicamos la fórmula empírica de Euler

$$s = \frac{F}{A} \cdot \alpha = \frac{s_y \cdot (L/i)^2}{C \cdot P^2 \cdot E}$$

$$\alpha = \frac{500 \cdot 160^2}{\frac{1}{4} \cdot P^2 \cdot 205800} = 25'2$$

$$s = \frac{2000}{P \cdot 5^2} \cdot 25$$

$$s = 254648 \text{ Kp/cm}^2 = 24955 \text{ Mpa}$$

La carga crítica de la columna considerada es:

$$F_{\max} = \frac{C \cdot P^2 \cdot E \cdot A}{\left(\frac{L}{i}\right)^2}$$

Sustituyendo se tiene:

$$F_{\max} = \frac{\frac{1}{4} \cdot P^2 \cdot 205800 \text{ N/mm}^2 \cdot P \cdot 5^2 / 4 \text{ cm}^2}{(160)^2}$$

$$\text{Carga crítica : } 38947 \text{ N}$$

### ESFUERZOS PERMISIBLES.

La capacidad de un elemento de una máquina para resistir o transmitir cargas es evidentemente necesario conocerla para poder hacer su diseño y proyecto.

Para evitar fallos de funcionamiento es preciso que las cargas que puede soportar sean mayor que las solicitaciones a las que se someta durante el funcionamiento de la máquina de la que forma parte.

La capacidad de un elemento para soportar cargas se denomina *resistencia*, y la relación entre la resistencia real y la resistencia requerida se denomina *coeficiente de seguridad*.

$$g = \frac{\text{resist. real}}{\text{resist. requerida}}$$

Está claro que  $\gamma_s$  debe ser mayor que 1 si se desea impedir roturas o fallos de funcionamiento de la máquina.

La determinación de factores de seguridad no es tarea fácil, y va unida a factores tales como:

- Probabilidad de sobrecarga accidental.
- Tipos de cargas (estáticas o dinámicas).
- Precisión con que se conocen las acciones.
- Inexactitudes en la construcción.
- Calidad de fabricación.
- Variaciones en las propiedades de los materiales.

- Factores adversos a la máquina (corrosión, otros efectos ambientales).

Altos valores de  $\gamma_s$  implican mayores gastos de construcción y menores riesgos de rotura. Valores bajos indican lo contrario.

### TABLAS ANEJAS

Material	Peso específico g kN/m <sup>3</sup>	Densidad de masa r Kg/m <sup>3</sup>
Aluminio	26'6	2710
Aleaciones de aluminio	26-28	2600-2800
Latón	82-85	8400-8600
Ladrillo	17-22	1800-2200
Bronce	80-86	8200-8800
Hierro fundido	68-72	7000-7400
Concreto	23	2300
Cobre	87	8900
Vidrio	24-28	2400-2800
Aleaciones de magnesio	17-18 87	1760-1830 8800
Niquel	11	1100
Nylon	9-13	960-1300
Hule	77	7850
Acero		
Piedra	26	2600
Granito	20-28	2000-2900
Piedra caliza	26-28	2600-2900
Mármol	26	2600
Cuarzo	44	4500
Titanio	190	1900
Tungsteno	5.5-7'1	480-720
Madera	72-77	7400-7800
Hierro forjado		

Tabla 1.- Pesos específicos y densidades de materiales

Material	Módulo de elasticidad E GPa	Módulo de elasticidad a cortante G GPa	Módulo de Poisson v
Aluminio	70	26	0.33
Aleaciones de Al.	70-79	26-30	0.33
Latón	96-110	36-41	0.34
Ladrillo (comp.)	10-24		
Bronce	96-120	36-44	0.34
Hierro fundido	83-170	32-69	0.2-0.3
Hierro gris	97	39	0.25
Cobre	110-120	40-47	0.33-0.36
Aleaciones de Mg.	45	17	0.35
Niquel	210	80	0.31
Nylon	2.1-2.8		0.4
Hule	0.0007-0.0004	0.0002-0.001	0.45-0.50
Acero	190-210	75-80	0.27-0.30
Piedra (comp.)			
Granito	40-70		0.2-0.3
Piedra caliza	20-70		0.2-0.3
Mármol	50-100		0.2-0.3
Titanio	110	40	0.33
Tungsteno	340-380	140-160	0.2
Madera	10-11		
Hierro forjado	190	75	0.3

Tabla 2.- Módulos de elasticidad y módulos de Poisson

Material	Esfuerzo de fluencia $s_y$	Esfuerzo último $s_u$
	MPa	MPa
Aluminio	20	70
Aleación de aluminio	35-500	100-550
Latón	70-550	200-620
Bronce	82-690	200-830
Hierro fundido (tracción)	120-290	69-480
Hierro fundido (compresión)		340-1.400
Cobre	330	380
Aleaciones de magnesio	80-280	140-340
Níquel	140-620	310-760
Nylon		40-70
Hule	1-7	7-20
Acero		
Alta resistencia	340-1.000	550-1.200
Máquina	340-700	550-860
Resorte	400-1.600	700-1.900
Inoxidable	280-700	400-1.000
Herramientas	520	900
Acero estructural	200-700	340-830
Alambre de acero	280-1.000	550-1.400
Piedra (compresión)		
Granito		70-280
Piedra caliza		20-200
Mármol		50-180
Titanio (puro)	400	500
Aleaciones de titanio	760-900	900-970
Tungsteno		1.400-4.000
Madera	40-70	50-100
Hierro forjado	210	340

Tabla 3.- Propiedades mecánicas

Material	Coefficiente de dilatación térmica $\alpha$ $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Aluminio y sus aleaciones	23
Latón	19.1-21.2
Ladrillo	5-7
Bronce	18-21
Hierro fundido	9.9-12.0
Cemento	7-14
Cobre	16.6-17.6
Vidrio	5-11
Aleaciones de magnesio	26.1-28.8
Níquel	13
Nylon	75-100
Hule	130-200
Acero	10-18
Piedra	5-9
Titanio	8-10
Tungsteno	4.3
Hierro forjado	12

Tabla 4.- Coeficientes de dilatación térmica

Tabla 5.- Centros de gravedad y momentos de inercia

Notación:

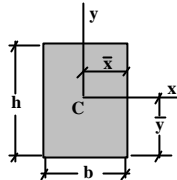
$A$  = área.

$x_G, y_G$  = distancias al centro de gravedad.

$I_x, I_y$  = momentos de inercia con respecto a los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.

$I_p = I_x + I_y$  = momento polar de inercia.

### Rectángulo (Origen de los ejes en el centroide).

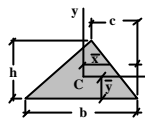


$$A = b \cdot h \quad x_G = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_p = \frac{b \cdot h}{12} \cdot (h^2 + b^2)$$

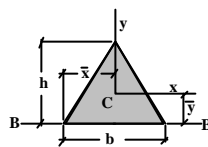
### Triángulo



$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad x_G = \frac{b+c}{3} \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_y = \frac{b \cdot h}{36} \cdot (b^2 - b \cdot c) + c^2$$

### Triángulo isósceles



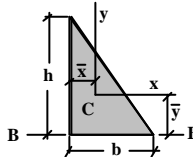
$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad x_G = \frac{b}{2} \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$$

$$I_p = \frac{b \cdot h}{144} \cdot (4 \cdot h^2 + b^2)$$

(Nota: para un triángulo equilátero,  $h = \sqrt{3} \cdot \frac{b}{2}$ .)

### Triángulo rectángulo

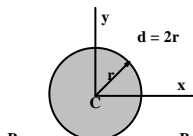


$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad x_G = \frac{b}{3} \quad y_G = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$$

$$I_p = \frac{b \cdot h}{36} \cdot (h^2 + b^2)$$

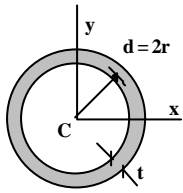
### Círculo



$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

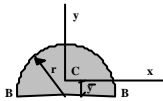
**Anillo circular (Fórmulas aproximadas para el caso cuando t es pequeño)**



$$A = 2 \cdot \rho \cdot r \cdot t = \rho \cdot d \cdot t \quad I_x = I_y = \rho \cdot r^3 \cdot t = \frac{\rho \cdot d^3 \cdot t}{8}$$

$$I_p = 2 \cdot \rho \cdot r^3 \cdot t = \frac{\rho \cdot d^3 \cdot t}{4}$$

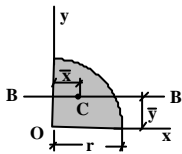
**Semicírculo**



$$A = \frac{\rho \cdot r^2}{2} \quad y_G = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \rho}$$

$$I_x = \frac{(9 \cdot \rho^2 - 64) \cdot r^4}{72 \cdot \rho} \approx 0.1098 \cdot r^4 \quad I_y = \frac{\rho \cdot r^4}{8}$$

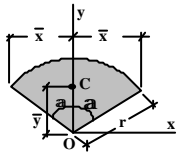
**Cuadrante de círculo**



$$A = \frac{\rho \cdot r^2}{4} \quad x_G = y_G = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \rho}$$

$$I_x = I_y = \frac{\rho \cdot r^4}{16}$$

**Sector circular**



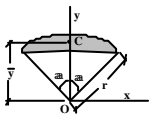
$\alpha =$  ángulo en radianes

$$a \approx \frac{\rho}{2}$$

$$A = a \cdot r^2 \quad x_G = r \cdot \text{sen } a \quad y_G = \frac{2 \cdot r \cdot \text{sen } a}{3 \cdot \text{sen } a}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4} \cdot (a + \text{sen } a \cdot \cos a) \quad I_y = \frac{r^4}{4} \cdot (a - \text{sen } a \cdot \cos a)$$

**Segmento circular**



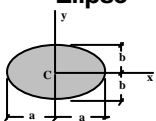
$\alpha =$  ángulo en radianes  $a \approx \frac{\rho \cdot \alpha}{2}$

$$A = r^2 \cdot (a - \text{sen } a \cdot \cos a) \quad y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{\text{sen}^3 a}{a - \text{sen } a \cdot \cos a}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4} \cdot (a - \text{sen } a \cdot \cos a + 2 \cdot \text{sen}^3 a \cdot \cos a)$$

$$I_y = \frac{r^4}{12} \cdot (3 \cdot a - 3 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a - 2 \cdot \text{sen}^3 a \cdot \cos a)$$

**Elipse**



$$A = \rho \cdot a \cdot b \quad I_x = \frac{\rho \cdot a \cdot b^3}{4} \quad I_y = \frac{\rho \cdot b \cdot a^3}{4}$$

$$I_p = \frac{\rho \cdot a \cdot b}{4} \cdot (b^2 + a^2)$$

## TENSIONES INICIALES Y TÉRMICAS.

En un sistema es posible que existan tensiones iniciales debidas a características del montaje como pueden ser errores en las longitudes de los elementos. Estos errores, a veces intencionados, pueden dar lugar, aun cuando no existan cargas, a tensiones que dependerán evidentemente de las propiedades de los materiales usados y de la magnitud de los errores.

Un caso típico de tensiones en estructuras es el debido a las dilataciones y contracciones de los elementos causados por cambios de la temperatura. Así si la temperatura de un elemento crece de  $t_i$  a  $t_f$  y la dilatación térmica se impide de alguna manera en dicho elemento aparecen tensiones cuya cuantificación puede hacerse por la condición de que la longitud permanezca invariable.

Sea  $\alpha$  el coeficiente de dilatación y  $\sigma$  el esfuerzo de compresión producido por las reacciones en los apoyos. La ecuación que determina  $\sigma$  será:

$$\alpha(t_f - t_i) = \frac{\sigma}{E}$$

De donde se obtiene:

$$\sigma = \alpha(t_f - t_i) \times E$$

La observación de esta ecuación y su comparación con la ya vista en el tema anterior:

$$\sigma = eE$$

Ofrece que:

$$e = \alpha(t_f - t_i)$$

## TENSIONES EN UN ANILLO CIRCULAR.

Si las fuerzas radiales están uniformemente distribuidas y actúan a lo largo del perímetro de un anillo delgado circular se producirá un alargamiento uniforme del mismo.

Para determinar la fuerza de extensión del anillo supongamos que se corta por una sección diametral tal y como aparece en la Figura 1

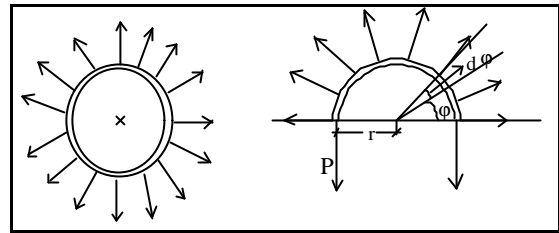


Figura 1.- Anillo sometido a carga radial uniforme.

Sea  $q$  la carga por unidad de longitud de circunferencia y sea  $r$  el radio de la misma. La fuerza que actúa en un segmento diferencial de anillo vendrá dada por la expresión:

$$dF = q \cdot r \cdot d\theta$$

Expresión en la que  $d\theta$  representa el ángulo correspondiente al segmento diferencial.

Tomando la suma de los componentes verticales de las fuerzas que actúan en el medio anillo, se obtendrá la siguiente ecuación de equilibrio:

$$2P = 2 \int_0^{\pi/2} q \cdot r \cdot \sin \theta \cdot d\theta = 2 \times q \times r$$

De donde:

$$P = q \cdot r$$

La fatiga de extensión de un anillo se obtiene dividiendo la fuerza  $P$  por el área de la sección recta del anillo.

En aplicaciones prácticas es frecuente tener que calcular la fatiga de extensión de un anillo circular giratorio. Sea  $m$  la masa de la unidad de longitud del anillo,  $w$  su velocidad de giro y sea  $r$  su radio, entonces la fuerza centrífuga es:

$$F_e = m \cdot w^2 \cdot r$$

Esta fuerza sustituye a  $q$  en la ecuación anterior por lo que:

$$P = m \cdot w^2 \cdot r^2$$

Como la tensión

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Siendo  $A$  el área de la sección recta del anillo se tiene que:

$$s = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}{A}$$

Expresión que representa la tensión en la sección recta (o sea la sección según la generatriz) de un anillo circular de masa por unidad de longitud circular  $m$  de radio  $r$  que gira a una velocidad angular  $\omega$ .

## ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS

Sea una barra prismática sometida a una carga axial de tracción de valor  $P$ . Hasta aquí solo se han considerado las tensiones en secciones transversales al eje de la barra. Si se considera ahora una sección  $pq$  perpendicular al plano de la Figura 2 inclinada con respecto al eje longitudinal de la barra:

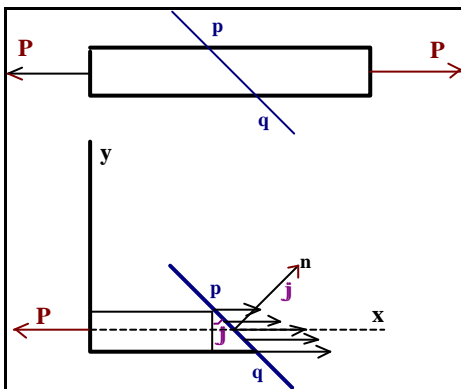


Figura 2.- Sección inclinada en una barra prismática.

Debido a que todas las fibras longitudinales tienen el mismo alargamiento, las fuerzas que representan la acción de la porción derecha de la barra sobre la izquierda estarán distribuidas uniformemente sobre la sección  $pq$ .

Si se aísla la porción izquierda de la barra, estará en equilibrio bajo la acción de las referidas fuerzas y la carga  $P$ . Se define por tensión en la sección  $pq$  la fuerza por unidad de área en dicha sección.

Sea  $A$  el área de la sección transversal de la barra y sea  $\varphi$  el ángulo de inclinación de la sección  $pq$  respecto al eje longitudinal de la barra.

El área de  $pq$  vendrá dada por la expresión:

$$S = A / \cos j$$

Y la fatiga en la sección  $pq$  vendrá dada por la expresión:

$$s_{pq} = P \cdot \cos j / A$$

Como se vio  $\sigma = \frac{P}{A}$ , por lo que:

$$s_{pq} = s \cdot \cos j$$

Como  $\cos j$  es menor o igual que 1, es evidente que la tensión en una sección inclinada es menor que la que surge en la sección transversal y que disminuye al aumentar el ángulo  $\varphi$ .

Cuando  $\varphi = \pi/2$  entonces la sección es paralela al eje longitudinal de la barra y la tensión vale cero.

La tensión  $\sigma_{pq}$  está dirigida longitudinalmente a la barra. Si se calcula su componente perpendicular a la sección  $pq$  (Figura 3) su valor vendrá dado por:

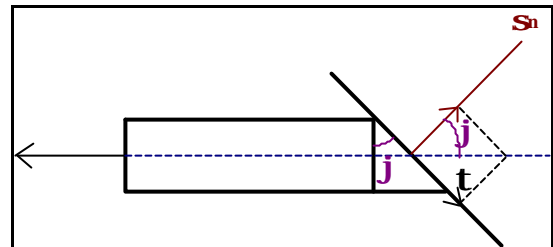


Figura 3.- Tensión normal y tangencial en una sección inclinada.

$$s_n = s_{pq} \cdot \cos j \quad \text{y} \quad s_t = s \cdot \cos^2 j$$

Si se calcula la componente tangencial a la superficie  $pq$  el esfuerzo cortante tiene por valor la expresión:

$$t = s \cdot \sin j \cdot \cos j$$

O bien como:

$$\sin j \cdot \cos j = \frac{1}{2} \cdot \sin 2j$$

Se tiene que:

$$t = \frac{s}{2} \cdot \sin 2j$$

Para tratar individualmente la deformación que cada componente de la tensión en la sección inclinada tomada se consideran dos secciones oblicuas paralelas  $pq$  y  $p_1q_1$  como aparecen en la Figura 4 siguiente:

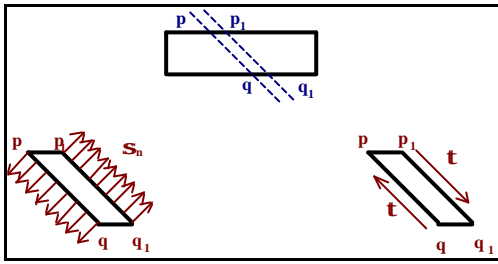


Figura 4.- Secciones inclinadas paralelas en una barra prismática.

La tensión normal produce extensión del elemento en dirección de la normal y el esfuerzo cortante produce un resbalamiento de la sección  $p_1q_1$  respecto a la sección  $p_2q_2$ .

De las expresiones de  $\sigma_n$  y  $\tau$  se desprende que el valor máximo de la tensión normal ocurre cuando  $p_1q_1$  coincide con la sección transversal perpendicular al eje longitudinal de la barra prismática, en cambio el valor máximo del esfuerzo cortante se da cuando la sección oblicua forma un ángulo de  $45^\circ$  respecto a dicho eje. En dichas condiciones:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma}{2}$$

Aunque el esfuerzo cortante tiene por valor la mitad del esfuerzo normal, tiene gran importancia práctica, debido a que hay materiales menos resistentes al esfuerzo cortante que al esfuerzo normal.

Las fórmulas de la tensión normal y del esfuerzo cortante deducida en barras prismáticas sometidas a tracción son igualmente válidas para cargas a compresión.

## ESTADO DE TENSIÓN BIDIMENSIONAL

Hay casos en los que los elementos de máquinas están sometidos simultáneamente a la acción de tracción o compresión en dos direcciones perpendiculares. Un ejemplo típico lo constituye el de la pared cilíndrica de una caldera sometida a una presión interna  $p$ , la cual produce dilataciones en las direcciones axial (según la generatriz del cilindro) y transversal (según círculos paralelos a las bases).

En general se puede decir que cuando sobre una placa plana suficientemente delgada como para poder considerar que se trata de un plano actúan únicamente fuerzas situadas en dicho plano en cada punto de la placa existe un estado de tensión que vamos a definir como bidimensional.

Sean  $F_x$  y  $F_y$  dos fuerzas de tracción que actúan sobre una placa en dos direcciones

perpendiculares. Supongamos un elemento de dicha placa determinado por cuatro secciones paralelas dos a dos y perpendiculares entre sí. Sea el triángulo rectángulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  una superficie elemental contenida en la placa, como se presenta en la Figura 5 siguiente.

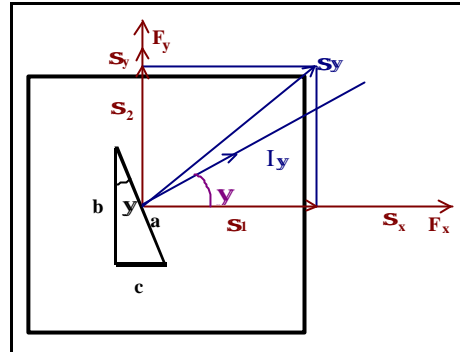


Figura 5.- Elemento de superficie de la placa.

Si se considera el equilibrio del triángulo rectángulo elemental, y si se denomina  $I_y$  su vector normal a la hipotenusa, su ecuación vectorial vendrá dada por:

$$I_y = \cos y \cdot i + \sin y \cdot j$$

Si la tensión sobre la hipotenusa es  $\sigma_y$ , su ecuación vectorial vendrá dada por:

$$s_y = s_1 \cdot i + s_2 \cdot j$$

La fuerza que actúa según el eje XX vendrá dada por  $\sigma_x \cdot b$  y la que actúa según el eje YY vendrá dada por  $\sigma_y \cdot c$ .

La condición de equilibrio de fuerzas en el triángulo ofrece que:

$$a \cdot s_y = b \cdot s_1 + c \cdot s_2$$

Lo que implica que:

$$s_1 = s_x \cdot b/a \text{ y } s_2 = s_y \cdot c/a$$

Y como  $b/a = \cos y$  y  $c/a = \sin y$ , se tiene que:

$$s_1 = s_x \cdot \cos y \text{ y } s_2 = s_y \cdot \sin y$$

Ecuaciones que pueden expresarse matricialmente como sigue:

$$\begin{bmatrix} a \cdot s_1 \\ c \cdot s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \cos y & 0 \\ 0 & c \cdot \sin y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix}$$



La matriz  $\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$  es el denominado tensor de conversión y es un operador matricial que transforma cada vector dirección  $\mathbf{s}_y = \cos \psi \mathbf{i} + \sin \psi \mathbf{j}$  en la tensión  $\mathbf{s}_y$  correspondiente.

La componente normal de  $\mathbf{s}_y$  será un esfuerzo de valor:

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_y \cdot \mathbf{I}_y \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s}_n = s_x \cos^2 \psi + s_y \sin^2 \psi = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2\psi$$

Y la componente tangencial será un esfuerzo cortante de valor:

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{s}_y \cdot \mathbf{I}_y + \mu^2 = \frac{s_x - s_y}{2} \sin 2\psi$$

Hay una propiedad importante que es la siguiente: entre dos direcciones  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{l}'$  y sus tensiones correspondientes se da la ecuación:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}' = \mathbf{s}' \cdot \mathbf{l}$$

En el caso de que las tensiones en la placa sean debidas a fuerzas de tracción y compresión su estudio analítico se reduce a considerar las compresiones como tracciones negativas.

Para los cálculos de ahora en adelante se considerará que  $F_x$  es negativa con lo que la tensión debida a ella tendrá de valor  $-\sigma_x$ , en este caso la expresión matricial que ofrece como resultado la ecuación de la tensión sobre la hipotenusa es:

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

Las componentes normal y tangencial serán ahora:

Componente normal:

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_y \cdot \mathbf{I}_y = \frac{-s_x + s_y}{2} - \frac{s_x + s_y}{2} \cos 2\psi$$

Componente tangencial:

$$\mathbf{s}_t = \frac{s_x + s_y}{2} \sin 2\psi$$

En particular para valores iguales en valor absoluto de las tensiones según el eje XX y según el eje YY, la componente normal es nula para  $\psi = 45^\circ$ . Esta claro que cuando  $\psi = 45^\circ$  solo existe esfuerzo cortante.

En el caso general de un elemento sometido a esfuerzos normales en dos direcciones perpendiculares y a esfuerzos cortantes como se presenta en la Figura 6 siguiente:

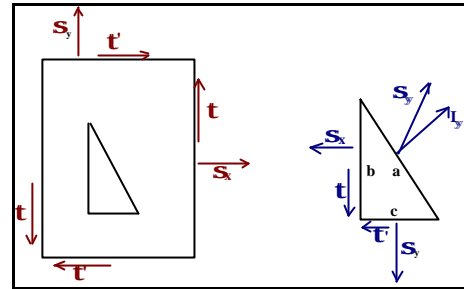


Figura 6.- Caso general de tensión bidimensional.

Se van a deducir las siguientes relaciones:

- $\tau = \tau'$
- $\sigma_\psi = f_1(\sigma_x, \sigma_y, \tau, \psi)$
- $\mathbf{s}_t = f_2(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t, 2\psi)$
- $\mathbf{s}_t = f_4(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t, 2\psi)$
- Máximo y mínimo de  $\sigma_n$  para  $\tan 2\psi = f_4(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t)$
- $\mathbf{s}_{n(\text{máximo})} = f_5(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t)$  y  $\mathbf{s}_{n(\text{mínimo})} = f_6(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t)$
- Máximo de  $\sigma_t$  para  $\tan 2\psi = f_7(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t)$
- $(\sigma_t)_{\text{máx.}} = f_8(\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, t)$
- Para  $\sigma_t = 0 \Rightarrow \sigma_n$  es máximo.

a) La deducción de que  $\tau = \tau'$  surge de la condición:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{M}_A = 0 \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \frac{c}{2} = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{c} \cdot \frac{b}{2} \quad \mathbf{P} \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}'$$

Ecuación que expresa la igualdad de las tensiones tangenciales o esfuerzos cortantes correspondientes a dos direcciones principales. Obsérvese que la anulación de momentos exige que ambas tensiones tengan los sentidos indicados en la figura o los opuestos, es decir, acercándose a la arista común o alejándose de ella.

b) La tensión en una arista definida por su vector normal es función de las tensiones perpendiculares, del esfuerzo cortante y del ángulo  $\psi$ .

En efecto, la condición de resultante de fuerzas nula da:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}_y - \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_x - \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{j} - \mathbf{t}' \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{i} - \mathbf{s}_x \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{j} = 0$$

De donde

$$\mathbf{s}_y = (s_x \cos 2\psi + t \sin 2\psi) \mathbf{i} + (t \cos 2\psi + s_x \sin 2\psi) \mathbf{j}$$

Ecuación que puede expresarse matricialmente por:

$$\begin{Bmatrix} s_{x0} \\ s_{y0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_x & t \\ t & s_x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 2\psi \\ \sin 2\psi \end{Bmatrix}$$

O en forma de producto tensorial contraído:

$$\mathbf{s}_y = \mathbf{T} \times \mathbf{I}$$

Siendo T el tensor que define el estado de tensión considerado.

c) La componente normal es función de los esfuerzos normales, cortantes y del ángulo  $\psi$ .

En efecto como:

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_y \times \mathbf{I}_y$$

Y siendo

$$\mathbf{I}_y = \cos 2\psi \mathbf{i} + \sin 2\psi \mathbf{j}$$

Resulta

$$\mathbf{s}_n = s_x \cos^2 \psi + s_y \sin^2 \psi + 2 \sin \psi \cos \psi t$$

O bien

$$\mathbf{s}_n = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2\psi + t \sin 2\psi$$

d) La componente tangencial es función de los esfuerzos normales y cortante y del ángulo  $\psi$ .

En efecto, la componente tangencial será:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_y \times \mathbf{l}_{y+p/2}$$

Siendo:

$$\mathbf{l}_{y+p/2} = -\sin \psi \mathbf{i} + \cos \psi \mathbf{j}$$

De donde:

$$\mathbf{s} = \frac{s_y - s_x}{2} \sin 2\psi + t \cos 2\psi$$

e) Los valores máximos y mínimos de  $s_n$  serán cuando  $\text{tg } 2\psi$  sea función de los esfuerzos normales y cortante.

En efecto como:

$$\frac{ds_n}{d\psi} = (s_y - s_x) \sin 2\psi + 2t \cos 2\psi = 0$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$\text{tg } 2\psi = \frac{2 \cdot t}{s_x - s_y}$$

Valor que sustituido en la segunda derivada respecto a  $\psi$  indica que los valores máximo y mínimo de  $s_n$  corresponden a direcciones perpendiculares.

f) Los valores máximos y mínimos de  $s_n$  son función de los esfuerzos normales y cortante.

En efecto al expresar  $\sin 2\psi$  y  $\cos 2\psi$  en función de  $\text{tg } 2\psi$  se tiene:

$$\begin{aligned} s_{n\max} &= \frac{s_x + s_y}{2} + \sqrt{\frac{(s_x - s_y)^2}{4} + t^2} \\ s_{n\min} &= \frac{s_x + s_y}{2} - \sqrt{\frac{(s_x - s_y)^2}{4} + t^2} \end{aligned}$$

g) El valor máximo de  $\sigma_t$  se obtiene para valores de  $\text{tg } 2\psi$  función de los esfuerzos normales y cortante.

En efecto derivando  $\sigma_t$  en función de  $\psi$  se tiene:

$$\frac{ds}{d\psi} = (s_y - s_x) \cos 2\psi + 2t(-\sin 2\psi) = 0$$

Es decir para:

$$\text{tg } 2\psi = \frac{s_y - s_x}{2t}$$

Que comparado con los valores de  $s_n$  máximo se prueba que la tensión cortante máxima forma  $45^\circ$  con las correspondientes a las tensiones normales máxima y mínima.

h) El esfuerzo cortante máximo es función de los esfuerzos normales y cortante a los que esté sometida la pieza.

En efecto expresando  $\sin 2\psi$  y  $\cos 2\psi$  en función de  $\text{tg } 2\psi$  se tiene:

$$s_{\max} = \sqrt{\frac{s_x - s_y}{2} + t^2} = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$$

i) Cuando  $\sigma_t$  es cero se da que  $\sigma_n$  es máximo.

En efecto  $\sigma_t = 0$  lleva a que:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2t}{s_x - s_y}$$

Que es la misma condición que da el valor máximo de  $\sigma_n$ .

### DIRECCIONES PRINCIPALES

La expresión de la tensión  $\sigma_\psi$  correspondiente a cada dirección  $\psi$  expresada matricialmente se vio que viene dada por:

$$s_y = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & t \\ t & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

Esta expresión permite hallar el valor de  $\psi$  tal que la tensión correspondiente tenga la misma dirección que  $l_\psi$ .

Tales direcciones se llaman principales.

La condición será que:

$$\begin{aligned} s_1 &= l \times \cos \psi \\ s_2 &= l \times \sin \psi \end{aligned}$$

Siendo  $\lambda = \text{módulo de } \sigma_y$

La compatibilidad del sistema de ecuaciones lineal homogéneo resultante:

$$\begin{aligned} s_1 &= s_x \times \cos \psi + t \times \sin \psi \\ s_2 &= t \times \cos \psi + s_y \times \sin \psi \\ \begin{vmatrix} (s_1 - l) \times \cos \psi + t \times \sin \psi & 0 \\ t \times \cos \psi + (s_2 - l) \times \sin \psi & 0 \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Es la anulación del determinante formado por los coeficientes de las incógnitas (Teorema de Rouché Frobenius), por tanto:

$$\begin{vmatrix} s_x - l & t \\ t & s_y - l \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación en  $\lambda$  que se obtiene al desarrollar el anterior determinante es:

$$l^2 - (s_x + s_y)l + s_x \times s_y - t^2 = 0$$

La cual tiene como raíces:

$$l = \frac{s_x + s_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + t^2}$$

Valores que coinciden con los encontrados anteriormente como máximos y mínimos de componentes normales.

### DEFORMACIÓN EN EL CASO DE TENSIONES BIDIRECCIONALES

Si una pieza está sometida a fuerzas de tracción que actúan en dos direcciones perpendiculares el alargamiento en una dirección depende no solamente de la tensión en esa dirección, sino que depende también de esfuerzo existente en la dirección perpendicular.

Sean XX e YY las direcciones de actuación de las fuerzas que se aplican. El alargamiento unitario en la dirección del eje XX debido al esfuerzo será  $\sigma_x/E$ .

La deformación debida a la tensión  $\sigma_y$  que se manifiesta por una contracción lateral en la dirección XX será:

$$-n \times \frac{\sigma_y}{E}$$

Siendo  $v$  la relación de Poisson.

Sumando ambas deformaciones el alargamiento unitario según el eje XX es igual a:

$$e = \frac{\sigma_x}{E} - n \times \frac{\sigma_y}{E} \quad (I)$$

Análogamente en la dirección YY se obtiene:

$$e = \frac{\sigma_y}{E} - n \times \frac{\sigma_x}{E} \quad (II)$$

En el caso de que las tensiones en ambas direcciones sean iguales se obtiene:

$$e = e = \frac{\sigma_x}{E} (1 - n)$$

De las ecuaciones I y II despejando  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  se obtiene la expresión de las tensiones en función de los alargamientos unitarios y de la relación de Poisson.

$$s_x = \frac{(\sigma + \nu \epsilon) \times E}{1 - \nu^2} \quad \text{y} \quad s_y = \frac{(\epsilon + \nu \sigma) \times E}{1 - \nu^2}$$

## ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

El concepto de energía de deformación es de gran importancia en el cálculo de elementos de máquinas y su concepto se aplica para determinar las respuesta de máquinas y estructuras a cargas estáticas y dinámicas.

En lo que sigue se va a estudiar la energía de deformación de elementos cargados axialmente.

Sea una barra prismática de longitud  $L$  sometida a una fuerza  $P$ . Supóngase que la carga  $P$  se aplica gradualmente desde un valor 0 hasta su valor máximo. La barra se alargará gradualmente según se va aplicando la carga hasta que llega a su alargamiento máximo  $\delta$ . Es evidente que la carga produce un trabajo y para calcularlo se utiliza el diagrama carga-deflexión o deflexión mostrado en la Figura 8, en el que en abscisas se presenta la deformación y en ordenadas la carga.

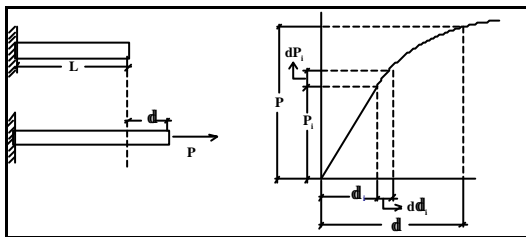


Figura 8.- Diagrama carga - deflexión.

Evidentemente la forma de la curva depende de las características del material que se utilice. En un instante dado de la deformación el valor de la carga será  $P_i$  y el de la deformación será  $\delta_i$ . El área de la curva representará el trabajo realizado por la carga para deformar la barra. Dicho trabajo  $W$  se calcula mediante la integral:

$$W = \int_0^{\delta} P_i \times d \delta_i$$

En otras palabras el trabajo desarrollado por la carga para conseguir el desplazamiento en la barra es igual al área bajo la curva carga - deflexión.

A esta energía se le denomina *trabajo interno* y se mide en el S.I. en Julios(J).

A veces se utiliza un concepto que es el de *densidad de energía de deformación* que representa la cantidad de energía de deformación por unidad de volumen del material.

Se denomina *resiliencia* la capacidad de un material para absorber energía en el margen elástico.

Se denomina *tenacidad* la capacidad de absorber energía de un material sin romperse.

## CARGA DINÁMICA

Una carga se dice que es estática cuando se aplica tan lentamente que prácticamente no varía con el tiempo y se dice que es dinámica cuando varía con el tiempo.

Cuando una carga es dinámica o sea que varía en el tiempo, produce vibraciones en las estructuras. Ejemplos clásicos de cargas dinámicas los constituyen las cargas debidas a impactos, las cargas originadas por elementos rotatorios desequilibrados en máquinas, las cargas debidas al viento, a la circulación por terrenos no lisos.

Se van a estudiar para auxiliar a la comprensión de este tipo de cargas el tipo más básico de cargas que son las denominadas *cargas de impacto*.

Como ejemplo de una carga de impacto se tomará el de la Figura 9:

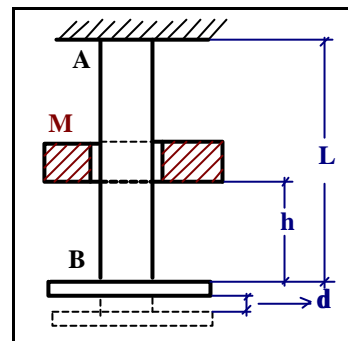


Figura 9.- Carga de impacto en una barra prismática.

El collar de masa  $M$  cae desde una altura  $h$  sobre una brida colocada en el extremo inferior de la barra  $AB$ .

Cuando el collar golpea la brida la barra empieza a alargarse lo que origina esfuerzos o tensiones y deformaciones axiales en un intervalo muy corto. En dicho intervalo la brida se habrá desplazado hasta su máxima deflexión. A continuación la barra empieza a acortarse y aparecen vibraciones longitudinales en ella de forma semejante a un resorte al que se comprime y suelta rápidamente. Al cabo de un cierto tiempo y debido a las amortiguaciones la barra permanece en reposo con la masa  $M$  sostenida por la brida.

El estudio detallado de esta acción es altamente complicado, no obstante se puede realizar un análisis aproximado mediante el concepto de energía de deformación y efectuando algunas suposiciones simplificativas.

En efecto, la energía potencial de la masa respecto a la brida es:

$$E_p = M \cdot g \cdot h$$

En el momento del impacto su energía potencial se ha vuelto nula y su energía cinética será:

$$E_c = 1/2 M \cdot V^2$$

Siendo  $V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

Esta energía cinética por el principio de conservación de la energía se transforma en otras formas de energía. Así se puede asegurar que parte de ella se consume en deformar la barra, parte de ella se transforma en calor, parte de ella se pierde en producir transformaciones plásticas en la brida.

Si se considera que no hay rebote de la masa M sobre la brida sino que ambas se adhieren y descienden juntas (suposición que sólo es válida si M es muy grande con respecto al conjunto brida - barra y se desprecian todas las pérdidas de energía considerándose que toda la energía cinética se emplea en deformar la barra, (lo cual está dentro de la seguridad al dimensionar la barra) y además se desprecian los cambios de energía potencial de la barra y se supone que la barra permanece en el margen lineal y que la distribución de tensiones es la misma que para cargas estáticas, es posible calcular el esfuerzo de tracción máximo y el máximo alargamiento en la barra debidos al impacto.

El alargamiento  $\delta$  puede obtenerse al igualar la pérdida de energía potencial de la masa con la energía de deformación adquirida por la barra.

La energía potencial perdida es:

$$M \cdot g \cdot (h + \delta)$$

La energía de deformación de la barra es el producto de la carga por la deformación, por tanto como:

$$s = \frac{P}{A} \text{ y } s = \sigma \cdot E \text{ y } \delta = \sigma \cdot L \Rightarrow P = \frac{E \cdot A \cdot \delta}{L}$$

Por lo que:

$$W = \int_0^\delta P \cdot d\delta \quad W = \frac{E \cdot A \cdot \delta^2}{2 \cdot L}$$

Igualando la variación de energía potencial con la deformación se tiene:

$$M \cdot g \cdot (h + \delta) = \frac{E \cdot A \cdot \delta^2}{2 \cdot L}$$

Esta ecuación de segundo grado en  $\delta$  tiene como raíz positiva la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{M \cdot g \cdot L}{E \cdot A} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{M \cdot g \cdot L}{E \cdot A} \frac{\sigma^2}{\sigma} + \frac{2 \cdot M \cdot g \cdot L \cdot h}{E \cdot A} \frac{\delta^{1/2}}{\delta}$$

Esta solución indica que a mayor M o a mayor altura de caída mayor es el alargamiento total de la barra, en cambio a mayor  $E \cdot A/L$  menor es el alargamiento.

A la expresión  $M \cdot g \cdot L/E \cdot A$  se le denomina deflexión estática  $\delta_{est}$ , con lo que la expresión anterior queda:

$$\delta = \delta_{st} + \left[ (\delta_{st})^2 + 2 \cdot h \cdot \delta_{st} \right]^{1/2}$$

Si la deformación estática es muy pequeña dicha expresión puede reducirse sin gran error a:

$$\delta \approx \sqrt{2 \cdot h \cdot \delta_{st}}$$

La tensión máxima en la barra puede calcularse a partir del alargamiento máximo, para ello como:

$$s = \frac{E \cdot \delta}{L}$$

Sustituyendo  $\delta$  por el valor obtenido en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$s = \frac{E \cdot \delta}{L} = \frac{M \cdot g}{A} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{M \cdot g}{A} \frac{\sigma^2}{\sigma} + \frac{2 \cdot M \cdot g \cdot h \cdot E}{A \cdot L} \frac{\delta^{1/2}}{\delta}$$

O bien, haciendo  $\frac{M \cdot g}{A} = s_{st}$  se tiene:

$$s = s_{st} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} s_{st}^2 + \frac{2 \cdot h \cdot E}{L} s_{st} \frac{\delta^{1/2}}{\delta}$$

En el caso de que la altura de caída sea grande se pueden despreciar en la suma  $\sigma_{est}$  quedando:

$$s \gg \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot E}{L}} \times s_{est} = \sqrt{\frac{M \cdot V^2}{2} \times \frac{2 \cdot E}{A \cdot L}}$$

Un caso particular de impacto ocurre cuando una carga se aplica de forma súbita sin velocidad inicial. Supóngase en el caso analizado que el collar se coloca suavemente sobre la brida y una vez establecido el contacto se suelta. Aunque en este caso no hay velocidad inicial el caso es completamente diferente al de carga estática en la barra. En este caso al soltar la masa la barra empieza a alargarse debido al peso. El alargamiento máximo se obtiene cuando se hace en las ecuaciones anteriores la altura de caída igual a cero, con lo que se obtiene:

$$d = 2 \cdot d_{est}$$

Lo que indica que la deflexión producida por una carga súbita es el doble de la deflexión que se produce cuando se aplica la carga de forma estática.

Una vez aplicada la carga de forma súbita la barra vibra hasta que finalmente llega al reposo correspondiente a la deflexión estática.

# TEMA 2. TORSIÓN

## INTRODUCCIÓN

El término *árbol* se usa para referirse a un elemento giratorio que a una velocidad de rotación determinada transmite una potencia.

El termino *eje* se utiliza para definir una pieza estacionaria sobre la que hay montadas ruedas giratorias.

Un *árbol de transmisión* llamado también *árbol principal* es aquel que recibe la potencia de una máquina motriz y la transmite a máquinas conectadas a el por medio de correas, cadenas o engranajes.

El hecho de transmitir una potencia desde un motor implica una velocidad angular (que debe expresarse en radianes/segundo) y un par que genera en el árbol la denominada *torsión*.

En general se dice que cuando un miembro estructural se carga con momentos que producen rotación alrededor de su eje longitudinal se produce torsión. Este tipo de solicitaciones se presentan en la Figura 1, en la que cada pareja de fuerzas genera un par de fuerzas o momento de valor igual al producto de las fuerzas por la distancia entre sus líneas de acción. El primer par tendrá de valor  $M_1 = P_1 \cdot d_1$  y el segundo par tendrá de valor  $M_2 = P_2 \cdot d_2$ .

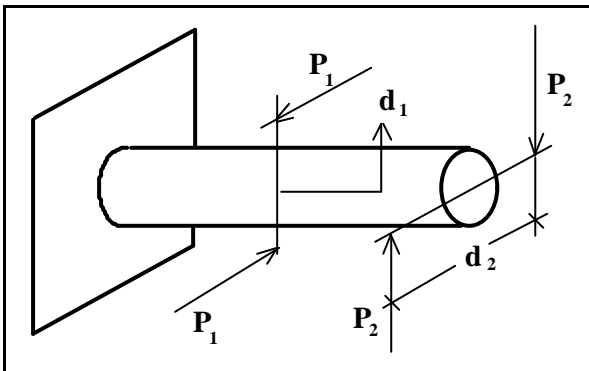


Figura 1.- Barra sujeta a torsión.

El *par* o *momento* es un vector perpendicular al plano determinado por la fuerza y la distancia al punto considerado.

En este tema se van a estudiar fórmulas para la determinación de tensiones y deformaciones en arboles y ejes sometidos a torsión y también a torsión combinada con otras cargas.

## TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR

Sea una barra recta de sección circular de radio R empotrada en uno de sus extremos sometida en el extremo libre a una torsión generada por un par M. Una barra trabajando de esta forma se dice que está sometida a *torsión pura*.

Si se analiza una sección transversal se observa que ha girado un ángulo, que los radios siguen rectos y que permanece plana y circular. Se puede considerar que la longitud de la barra y su radio, si el ángulo girado es pequeño, no varían.

Durante la torsión ocurre una rotación alrededor del eje longitudinal de un extremo de la barra respecto al otro. Si el ángulo girado es  $\phi$ , ángulo que se conoce como *ángulo de torsión*, una línea generatriz de la barra *nn'* girará pasando a la posición *nn''*. Debido a la rotación un elemento de longitud infinitesimal **dx** en la barra girará un ángulo **dγ** y si se considera la superficie determinada por abcd en el elemento de longitud pasará a ocupar la a b'c'd. Los vértices ya no miden 90°.

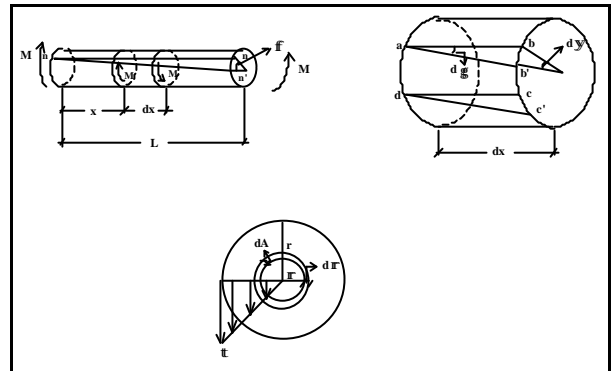


Figura 2.- Elemento de barra sometida a torsión pura.

El ángulo  $d\gamma$  de la figura anterior se calcula como sigue:

$$\text{tg } d\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

Y como el ángulo es muy pequeño, la tangente del ángulo tiende al ángulo, por lo que:

$$d\gamma = \frac{bb'}{ab}$$

Como:

$$bb' = r \cdot d\gamma \quad \text{y} \quad ab = dx$$

Se tiene que:

$$d\theta = \frac{r \cdot dy}{dx}$$

Un par M aplicado en el extremo libre de una barra de sección transversal circular, cuyo otro extremo está empotrado origina en una sección AA un estado de tensión que puede deducirse aplicando el Principio de Fragmentación de la Estática al sólido parcial comprendido entre la sección AA y el extremo libre en el que se aplica el par.

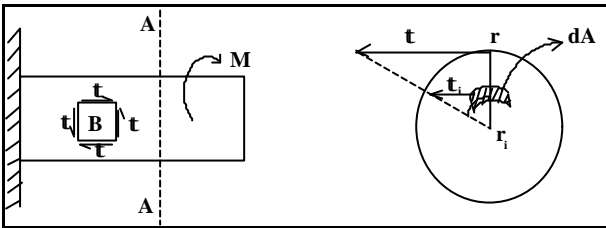


Figura 3.- Barra en voladizo de sección circular con un par aplicado en su extremo libre.

La resultante de las acciones tangenciales de la parte izquierda sobre el sólido considerado a lo largo de la sección debe ser nula ya que el sistema de fuerzas aplicado es un par.

Es lógico suponer que las tensiones tangenciales son proporcionales a sus distancias al centro, con lo que la magnitud de estas tensiones será:

$$\frac{t_i}{r_i} = \frac{t}{r} \Rightarrow t_i = t \times \frac{r_i}{r}$$

La fuerza tangencial que actúa sobre un elemento de área será:

$$t_i \cdot dA$$

Y la suma de momentos respecto al centro de la sección circular será:

$$\int_0^r t_i \cdot r_i \cdot dA = \frac{t}{r} \int_0^r r_i^2 \cdot dA = \frac{t \cdot I_0}{r}$$

Siendo  $I_0$  el denominado *momento polar de inercia*.

Igualando los momentos de las fuerzas que actúan sobre la sección de la barra con el momento aplicado se tendrá que:

$$\frac{t \cdot I_0}{r} = M$$

De donde despejando se tiene:

$$t = \frac{M \cdot r}{I_0} \quad (I)$$

La ecuación (I) se denomina *formula de la torsión* y establece que el esfuerzo cortante máximo es directamente proporcional al par aplicado y al radio de la sección circular de la barra e inversamente proporcional al momento polar de inercia.

Como en una barra maciza de sección circular el momento polar de inercia vale:

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

Y  $r = d/2$ , sustituyendo en la formula de torsión se tiene que:

$$t_{\max} = \frac{16 \cdot M}{\pi d^3}$$

## TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN CIRCULAR HUECA

Las barras circulares huecas son mucho mas eficaces que las barras macizas para resistir cargas torsionales.

En efecto, esto es cierto ya que como se ha explicado los esfuerzos cortantes en una barra circular completamente sólida disminuyen desde su valor máximo en la superficie hasta un valor cero en el centro del círculo, lo que hace que mucho del material que constituye la barra este sometido a esfuerzos cortantes muy por debajo del valor máximo admisible y es por lo que si es necesaria una reducción de peso y un ahorro de material es preciso el uso de barras circulares huecas.

El análisis de tensiones en las barras huecas es casi idéntico al de las macizas, si bien la distancia radial se limita al margen  $r_1$  (radio interior),  $r_2$  (radio exterior).

El momento polar de inercia toma en este caso el valor:

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \times (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{32} \times (d_2^4 - d_1^4)$$

Si el tubo es de pared muy delgada entonces puede emplearse la siguiente formula aproximada:



$$I_o = 2r^3 \cdot t = \frac{\rho d^3 \cdot t}{4}$$

Siendo  $t$  el espesor del tubo y  $r$  y  $d$  el radio y el diámetro medio del tubo.

### CORTANTE PURO.

Cuando una barra se somete a torsión actúan esfuerzos cortantes  $t$  sobre secciones transversales y sobre superficies longitudinales como se vio anteriormente.

Sea un elemento  $abcd$  situado entre dos secciones transversales paralelas y próximas y dos planos longitudinales como se presenta en la Figura 4.

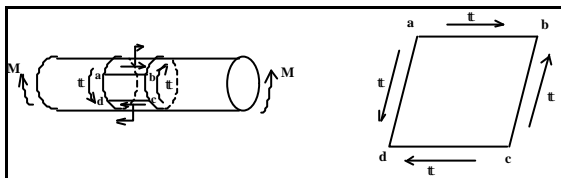


Figura 4.- Esfuerzos que actúan en un elemento de superficie de una barra sometida a torsión.

Si en el elemento de superficie longitudinal considerado los únicos esfuerzos que actúan son los cortantes por lo que se dice que está sometido a *esfuerzo cortante puro*.

En el caso de la figura los esfuerzos cortantes son los que se presentan y si se considera en  $abcd$  una dirección que forme un ángulo  $\psi$  con la generatriz de la barra como se presenta en la Figura 5 se tiene:

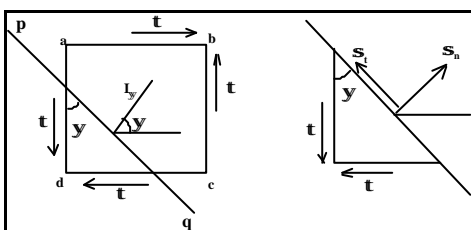


Figura 5.- Análisis de esfuerzos en planos inclinados en un elemento en esfuerzo cortante puro.

El vector unitario en la dirección normal a  $pq$  tiene por componentes:

$$\bar{l}_y = \cos \psi \cdot \bar{i} + \sin \psi \cdot \bar{j}$$

La tensión en esa dirección vendrá dada por:

$$\mathbf{s}_y = \mathbf{s}_1 \cdot \bar{i} + \mathbf{s}_2 \cdot \bar{j}$$

Siendo la expresión matricial que ofrece los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \bar{i} \\ \mathbf{s}_2 \cdot \bar{j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \cos \psi \\ t \sin \psi \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_1 = t \cos \psi$$

$$\mathbf{s}_2 = t \sin \psi$$

$$\mathbf{s}_y = t \cdot \sin \psi \cdot \bar{i} + t \cdot \cos \psi \cdot \bar{j}$$

La componente normal será:

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_y \cdot \bar{l}_y$$

Como:

$$\bar{l}_y = \cos \psi \cdot \bar{i} + \sin \psi \cdot \bar{j} \Rightarrow$$

$$\mathbf{s}_n = t \sin 2\psi$$

La componente tangencial será:

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{s}_y \cdot \bar{l} + p/2$$

Como:

$$\bar{l} + \frac{p}{2} = \sin \psi \cdot \bar{i} + \cos \psi \cdot \bar{j}$$

$$\mathbf{s}_t = t \cos 2\psi$$

Las ecuaciones anteriores representan los esfuerzos normal y cortante que actúan para cualquier dirección sobre la superficie de la barra en función del esfuerzo cortante al que está sometida.

El esfuerzo normal tiene como se vio anteriormente un valor máximo para  $\psi = 45^\circ$ . En dicha dirección el esfuerzo tangencial vale 0.

### TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN RECTANGULAR

El problema de torsión de un árbol de sección rectangular es complicado debido al alabeo de la sección durante la torsión. Observando la deformación se ve que esta es máxima en el centro de los lados y nula en los ángulos, por lo que se deduce que la fatiga cortante es máxima en los centros de los lados y nula en los ángulos de la sección transversal.

La fatiga cortante máxima en el caso de árboles o ejes de sección rectangular se calcula por la expresión empírica:

$$f_{\max} = \frac{M}{\alpha b \cdot c^2}$$

Ecuación en la que:

- b es la longitud del lado mayor de la sección
- c es la longitud del lado menor de la sección.
- $\alpha$  un factor dependiente de la relación b/c, tal que si b/c < 10  $\alpha$  vale 0.208 y si b/c = 10  $\alpha$  vale 0.313 y si b/c > 10 vale 0.333.

También se suele usar la formula empírica:

$$f_{\max} = \frac{M}{b \cdot c^2} \times \left( \frac{c}{b} \right)^3 + 1.8 \cdot \frac{c}{b}$$

El ángulo de torsión por unidad de longitud se obtiene por la también formula empírica:

$$f = \frac{M}{\beta b \cdot c^3 \cdot G}$$

Ecuación en la que:

- $\beta$  es un factor experimental que si b/c < 10 vale 0.141 y si b/c = 10 vale 0.313 y si b/c > 10 vale 0.333.

## ACCIONES COMBINADAS

El principio de superposición de efectos permite estudiar las fatigas producidas por una combinación de cargas actuando sobre un árbol o sobre un eje.

Para una mas fácil interpretación se va a realizar el estudio aplicando dicho principio a algunos ejemplos numéricos, pero antes, por la importancia que tiene, se va a hacer un análisis de las deformaciones en barras cargadas lateralmente y a obtener la denominada *fórmula de la flexión*.

Las cargas laterales en barras provocan flexiones en las mismas deformando el eje longitudinal y transformándolo en una línea curva.

Un ejemplo se representa en la figura en la que se representa una barra en voladizo sometida a una carga puntual P colocada en su extremo libre.

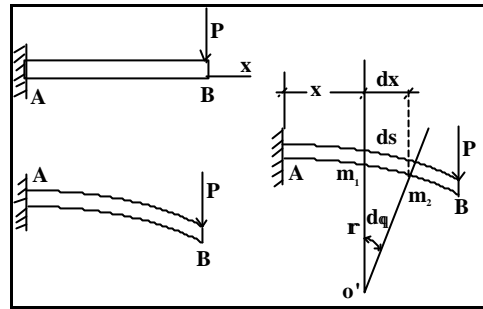


Figura 6.- Deformación en una barra en voladizo cargada en su extremo libre.

La forma curva del eje longitudinal de la barra se denomina *curva de flexión* o *curva elástica* o simplemente *elástica*.

Es frecuente usar como referencia un par de ejes cartesianos de forma que el eje XX coincide con el eje de la barra en reposo y el eje YY es perpendicular a este. El origen de coordenadas se toma en el empotramiento de la barra.

Si se consideran dos puntos  $m_1$  y  $m_2$  sobre la elástica de la barra, situados el punto  $m_1$  a una distancia x del origen y el punto  $m_2$  a una pequeña distancia ds de  $m_1$  y en ambos puntos se traza una normal a la tangente a la curva de flexión, se observa que dichas normales se cortan en un punto O' que constituye el centro de curvatura de la elástica a una distancia x del origen. La distancia desde O' hasta el punto de tangencia se denomina *radio de curvatura*  $\rho$  y su inversa, por definición, es denominada *curvatura*  $\chi$ .

Como se sabe cuando el ángulo es pequeño el arco es igual al radio por el ángulo expresado este en radianes, por lo que:

$$r \cdot d\phi = ds$$

Bajo la acción de los dos momentos la barra se curva de forma que considerando dos secciones próximas mn y pq a una distancia dx, si se considera que las secciones planas y perpendiculares al eje de la barra permanecen planas y perpendiculares al mismo después de curvarse la barra, lo cual puede demostrarse experimentalmente, dichas secciones giran una con respecto a la otra ocurriendo que las fibras de la parte superior de la barra trabajan a tracción y las de la parte inferior trabajan a compresión. Está claro que en algún lugar entre la parte superior y la inferior se localiza una superficie que ni se alarga ni se comprime, esta es la denominada *superficie neutra* y el eje que la representa en el plano del dibujo se llama *eje neutro* o *línea neutra*.

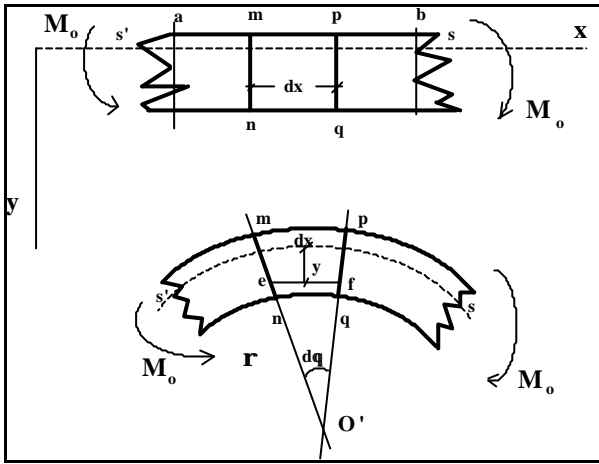


Figura 7.- Deformaciones de una barra en flexión pura.

Los planos de las secciones mn y pq se cortan según una recta que pasa por el centro de curvatura O'. Sea  $dq$  ángulo entre dichos planos y sea  $\rho$  el radio de curvatura. Como la distancia inicial entre ambas secciones no varía en la línea neutra se cumplirá que  $\rho \cdot dq = dx$ . En cambio las demás fibras longitudinales de la barra se acortarán o se alargarán originando deformaciones longitudinales que se representarán por  $\epsilon_x$ . Para evaluar estas deformaciones considérese una fibra situada a una distancia  $y$  de la línea neutra. La longitud de esta fibra será:

$$dl = (r - y) \cdot dq = dx - \frac{y}{r} \cdot dx$$

Como la longitud inicial de la fibra considerada es  $dx$ , el acortamiento es  $d\delta = dx - dl$  o sea

$$d\delta = \frac{y}{r} \cdot dx$$

La deformación unitaria, como se sabe es igual al alargamiento total dividido por la longitud, con lo que:

$$\epsilon_x = \frac{d\delta}{dx} \quad \epsilon = \frac{y}{r}$$

La ecuación anterior establece que las deformaciones longitudinales son inversamente proporcionales al radio de curvatura y directamente proporcionales a la distancia de la fibra considerada a la línea neutra.

A partir de las deformaciones longitudinales se pueden obtener las tensiones según el eje neutro que actúan perpendicularmente a la sección transversal de la barra.

Cada fibra longitudinal está sometida únicamente a tracción o a compresión, en consecuencia:

$$s_x = E \cdot \epsilon = \frac{E \cdot y}{r}$$

La ecuación anterior indica que la tensión sobre la sección transversal varía de forma directamente proporcional a la distancia a la superficie neutra, lo cual se representa en la figura siguiente:

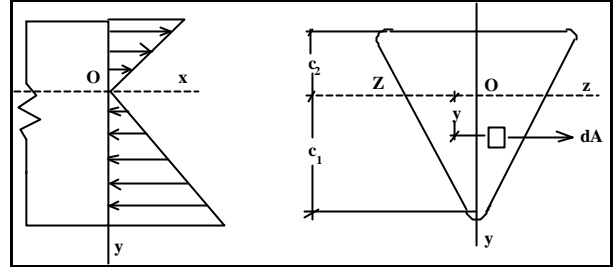


Figura 8.- Distribución de esfuerzos longitudinales o normales.

Aplicando las ecuaciones de la estática la resultante de las fuerzas que actúan en la sección transversal es nula pues en la barra no hay fuerzas longitudinales y solo existe un momento de valor  $M$ .

Sea un elemento  $dA$  de la sección transversal, situado a una distancia  $y$  de la línea neutra. La fuerza que actúa sobre él será  $s_x \cdot dA$ . Si se aplica momentos respecto al eje  $ZZ$  se tendrá:

$$dM = s_x \cdot y \cdot dA$$

La integral de todos los momentos en el área de la sección transversal debe ofrecer como ecuación:

$$M = \int s_x \cdot y \cdot dA$$

Y como  $s_x = E \cdot y / r$ , se tiene que:

$$M = \frac{1}{r} \cdot E \cdot \int y^2 \cdot dA$$

Como  $\int y^2 \cdot dA =$  Momento de inercia del área de la sección transversal  $= I$ , se tiene que:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E \cdot I}$$

La ecuación anterior indica que el radio de curvatura del eje longitudinal de una barra está ligado proporcionalmente con el momento  $M$  y con el producto  $E \cdot I$  denominado *rigidez de la barra*.

Si la ecuación anterior se sustituye en:

$$s_x = \epsilon \cdot E = \frac{E \cdot y}{r}$$

Se tiene que:

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I} \quad (\text{fórmula de la flexión}).$$

La ecuación anterior establece que las tensiones normales a una distancia  $y$  de la línea neutra en una barra sometida a flexión pura son directamente proporcionales al momento  $M$  flector e inversamente proporcionales al momento de inercia de su sección transversal.

También indica que las tensiones normales varían con la distancia al eje neutro, de forma que los esfuerzos de tracción y compresión máximos se presentan en los puntos de la barra más alejados de la línea neutra.

Sean  $c_1$  y  $c_2$  las distancias desde la línea neutra hasta las fibras extremas de la sección transversal de la barra. Los esfuerzos normales máximos serán:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot c_1}{I} = \frac{M}{W_1} \quad \sigma_2 = -\frac{M \cdot c_2}{I} = -\frac{M}{W_2}$$

Siendo:

$$W_1 = \frac{I}{c_1} \quad \text{y} \quad W_2 = \frac{I}{c_2}$$

Los valores  $W_1$  y  $W_2$  son los denominados *módulos de sección* o *momentos resistentes* de la sección transversal, se miden en  $\text{mm}^3$ .

Si la sección transversal es simétrica entonces  $c_1$  y  $c_2$  son iguales.

En una barra de sección transversal rectangular de base  $b$  y altura  $h$  el momento de inercia y el módulo de sección valen:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{y} \quad W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Y para una sección transversal circular valen:

$$I = \frac{p \cdot d^4}{64} \quad \text{y} \quad W = \frac{p \cdot d^3}{32}$$

Por último destacar que en el estudio realizado se ha considerado que las barras estaban sometidas a flexión pura y no existen fuerzas cortantes. Los análisis experimentales demuestran que los esfuerzos cortantes no alteran significativamente las tensiones longitudinales o normales. Además la fórmula de la flexión ofrece resultados exactos únicamente en las regiones de la barra donde la distribución de esfuerzos no se

interrumpe, bien por irregularidades en la barra, bien por discontinuidades en la carga.

### Flexión y torsión.

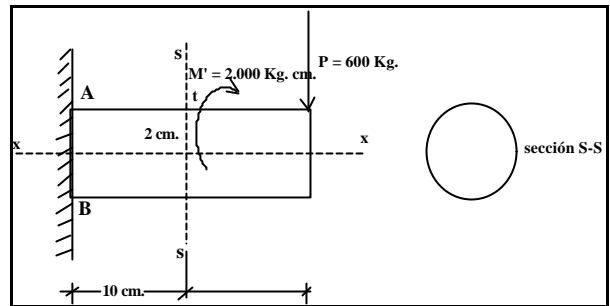


Figura 8.- Flexión y torsión simultáneas.

En (A):

$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I}; \quad I = \frac{p \cdot d^4}{64} \quad \sigma_x = 7650 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{(tracción)}$$

$$M = 600 \cdot 10 \text{ Kg.cm}$$

En (B):

$$\sigma_x = -7650 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{compresión})$$

En A=B:

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{I_o}; \quad I_o = \frac{p \cdot d^4}{32} \quad \tau = 1272 \text{ Kg/cm}^2.$$

Se sabe que:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

En (A):

$$\sigma_{\text{máx}} = 7855 \text{ Kg/cm}^2; \quad \sigma_{\text{mín}} = -205 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 4030 \text{ Kg/cm}^2$$

En (B):

$$\sigma_{\text{máx}} = 205 \text{ Kg/cm}^2; \quad \sigma_{\text{mín}} = -7855 \text{ Kg/cm}^2.$$

$$\sigma_{\text{máx}} = -4030 \text{ Kg/cm}^2$$

**Flexión, carga axial y torsión en barra en ménsula**

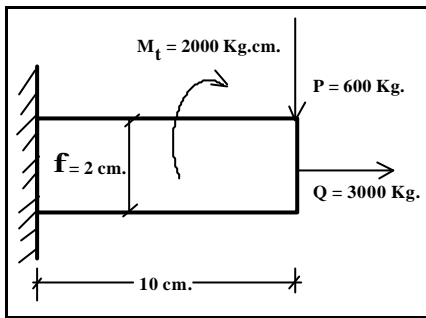


Figura 9.- Tracción, flexión y torsión simultáneas.

En (A):

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I} + \frac{Q}{A}; \tau = \frac{M_t \cdot r}{I_0}$$

$$\sigma = 8604 \text{ Kg/cm}^2; \tau = 1272 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 8782 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{\text{mín}} = -178 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = 4480 \text{ Kg/cm}^2$$

En (B):

$$\sigma = -6696 \text{ Kg/cm}^2; \tau = 1272 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 233 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{\text{mín}} = -6929 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = 3581 \text{ Kg/cm}^2$$

**Flexión y torsión en barra simplemente apoyada**

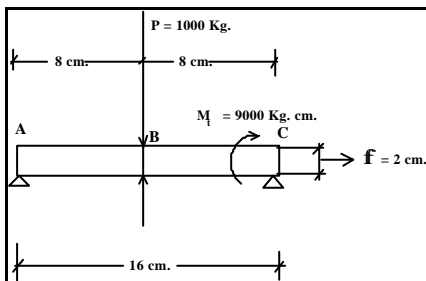
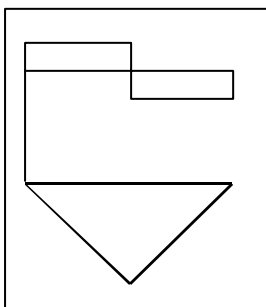


Figura 10.- Flexión y torsión en barra simplemente apoyada.

Calcular  $\sigma_n$  máx,  $\sigma_n$  mín y  $\tau_{\text{máx}}$  en A y en B

- Cálculo de V y M.



$$V_{\text{máx}} \text{ en (A)} = \frac{-1000}{2} = 500 \text{ Kp.}$$

$$V_{\text{máx}} \text{ en (B)} = 0$$

$$M \text{ en (A)} = 0$$

$$M \text{ en (B)} = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{1000 \cdot 16}{4} = 4000 \text{ Kp.m.}$$

$$M_c = 4000 \text{ Kp.}$$

Figura 11.- Diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores

En (A):

$$\tau_A = \frac{500}{\frac{\pi d^2}{4}} \text{ Kp/cm}^2 \Rightarrow \tau = 159 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma_A = \frac{0.1}{\frac{\pi d^4}{64}} \text{ Kp/cm}^2; \sigma = 0 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\tau_A = \frac{M_t \cdot r}{I_0} \Rightarrow \tau = \frac{9000 \cdot 1}{\frac{\pi d^4}{32}} \text{ Kp/cm}^2 \Rightarrow \tau = 573 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{máx}} = 573 \text{ Kg/cm}^2; \sigma_{\text{mín}} = -573 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2} = 573 \text{ Kp/cm}^2$$

En (B):

$$\tau_B = \frac{M_t \cdot r}{I_0} = 573 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma_B = -\frac{4000 \cdot 2}{\frac{\pi d^4}{64}} = -10186 \text{ Kp/cm}^2 \text{ (compresión)}$$

$$\sigma_{\text{máx}B} = -\frac{10186}{2} + \sqrt{\frac{10186^2}{4} + 573^2}$$

$$\sigma_{\text{mín}B} = -\frac{10186}{2} - \sqrt{\frac{10186^2}{4} + 573^2}$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_{\text{máx}} - \sigma_{\text{mín}}}{2}$$

$$\sigma_{\text{máx}B} = 32 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{mín}B} = -10218 \text{ Kp/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}B} = 5125 \text{ Kp/cm}^2$$

**DEFORMACIONES Y MODULO DE TORSIÓN**

En el tema 1 se dijo que  $G \gg E/2$ , ahora se verá que esto es cierto, para ello si en los extremos de una barra maciza de sección circular como la de la figura siguiente actúa un par  $M = F \cdot d$ , el estado de tensión en una superficie elemental A será el indicado en la Figura 12, y la tensión sobre una orientación genérica teniendo en cuenta que trabaja a torsión pura, vendrá dada por:

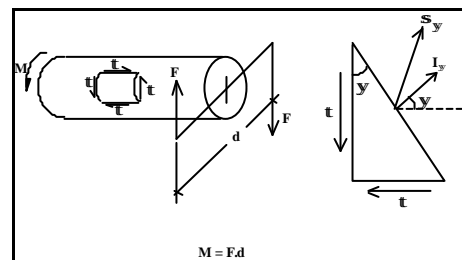


Figura 12.- Barra circular sometida a torsión.

$$\mathbf{s}_y = t \cdot \sin \gamma \cdot \mathbf{i} + t \cdot \cos \gamma \cdot \mathbf{j}$$

O bien:

$$\begin{cases} a \sin \theta = a_0 t \cos \gamma_0 \\ a \cos \theta = t \cos \gamma_0 \end{cases}$$

Las direcciones principales son para  $\tan \psi = \pm 1$ , lo que implica:

$$\mathbf{y} = \pm 45^\circ$$

Un cuadrado elemental ABCD por la deformación debida a M toma la forma A'B'C'D'.

Los alargamientos correspondientes a la sección considerada pueden calcularse así:

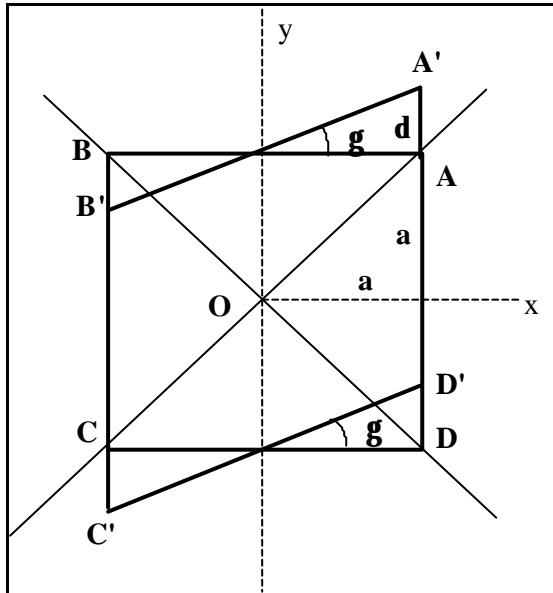


Figura 13.- Deformación en una sección elemental.

$$OA = \sqrt{a^2 + (a+d)^2}; \text{ como } \frac{d}{a} = t \Rightarrow OA = a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} t^2 + t}$$

Como:

$$OA = a \cdot \sqrt{2}$$

Y el alargamiento unitario:

$$\epsilon_y = \frac{OA' - OA}{OA} \Rightarrow \epsilon_y = \sqrt{1 + \frac{t^2}{2} + t} - 1$$

Operando se tiene:

$$\epsilon_y = \frac{1 + \frac{t^2}{2} + t - 1}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{2} + t}}$$

Como  $\gamma$  es pequeño, se puede despreciar  $\tan^2 \gamma$ , por lo que:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \cdot t$$

Como  $\gamma$  es pequeño  $\tan \gamma = \gamma$ , por lo que:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \gamma$$

Análogamente:

$$\epsilon_x = \frac{OB' - OB}{OB} = -\frac{1}{2} \gamma$$

Como se sabe:

$$\epsilon_y = \frac{t_y}{E} + m \cdot \frac{t_x}{E}$$

Como:

$$t_x = t_y = t \Rightarrow \epsilon_y = \frac{t}{E} (1+m) \Rightarrow t = \frac{E \cdot \epsilon_y}{1+m}$$

Como:

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \gamma \Rightarrow t = \frac{E \cdot \gamma}{2(1+m)}$$

Como se vio:

$$t = G \cdot \gamma$$

Se tiene:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+m)}$$

Como  $\nu$  es pequeño, se puede considerar que:

$$G \gg \frac{E}{2}$$

$G$  se denomina *módulo de elasticidad transversal* y también *módulo de rigidez* o *módulo de torsión*.

Debido al par  $M$  aplicado, una generatriz  $AB$  pasa a ocupar la posición  $AB'$ , formando  $AB$  y  $AB'$  un ángulo  $\gamma$ .

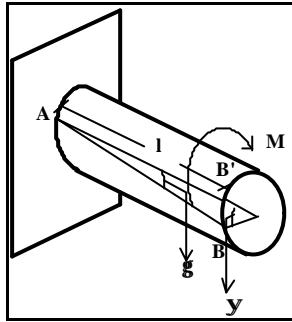


Figura 14.- Deformación de una generatriz.

Se sabe que:

$$BB' = r \cdot y = l \cdot g \Rightarrow g = \frac{r \cdot y}{l}$$

Como:

$$t = \frac{M \cdot r}{I_0}$$

Y como:

$$t = G \cdot g \Rightarrow t = G \cdot \frac{r \cdot y}{l} \Rightarrow \frac{M \cdot r}{I_0} = G \cdot \frac{r \cdot y}{l}$$

Despejando M se tiene:

$$M = \frac{G \cdot I_0 \cdot y}{l}$$

O bien despejando  $\psi$  se tiene:

$$y = \frac{M \cdot l}{I_0 \cdot G}$$

Expresión que permite determinar el ángulo girado por una barra de longitud  $l$ , con momento polar de inercia  $I_0$ , fabricada con un material de módulo de elasticidad transversal  $G$  a la que se le aplica un momento torsor  $M$ .

## CALCULO DE ÁRBOLES

### Método de las tensiones

En la expresión:

$$t = \frac{M \cdot r}{I_0}$$

En la que:

$$I_0 = \int_0^r (2 \cdot \rho \cdot r \cdot d) \cdot r^2 = \frac{\rho \cdot d^4}{32}$$

Sustituyendo se tiene:

$$t = \frac{16 \cdot M}{\rho d^3} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M}{\rho t}}$$

Si se conoce la potencia a transmitir  $N$  y el número de revoluciones a que gira el eje, como:

$$\text{Potencia} = \text{Par} \cdot \text{velocidad angular}$$

Se tiene:

$$N = \frac{M \cdot 2\pi n}{60.75} \Rightarrow M = \frac{225000}{\rho} \times \frac{N}{n}$$

Siendo:

$N$  = potencia en C.V.

$M$  = par en Kg· m

$n$  = r.p.m.

sustituyendo en la ecuación:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M}{\rho \times t}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{3600000}{\rho^2 \times t} \times \frac{N}{n}}$$

Si  $t = t_{perm}$  por el material,  $d$  ofrece el valor del diámetro necesario para que el eje pueda transmitir la potencia  $N$  a un régimen de  $n$  r.p.m.

### Método de las deformaciones

En la expresión:

$$y = \frac{M \cdot l}{I_0 \cdot G}$$

El ángulo  $y$  viene expresado en radianes. Transformando  $y$  en grados y llamando  $a$  al nuevo valor se tiene:

$$a = \frac{180}{\rho} \times y = \frac{180}{\rho} \times \frac{M \cdot l}{I_0 \cdot G}$$

El cálculo de ejes utiliza una norma que permite que:

$$a \leq \frac{1}{4} \times \frac{10^0}{\rho} \text{ para } l = 100 \text{ cm.}$$

Por lo que sustituyendo estos valores proporcionales en la expresión anterior, e igualándolos adecuadamente con la potencia transmitida por el eje y con el número de revoluciones, se puede obtener el diámetro de un

material necesario para transmitir una potencia a un régimen de giro dado.

## MÉTODOS EMPÍRICOS DE CÁLCULO DE ÁRBOLES

En el caso de árboles sometidos a flexión y torsión normalmente se aplica la ecuación de la A.S.M.E. para un eje macizo que viene dada por:

$$d^3 = \frac{16}{\sigma_y} \times \sqrt{(K_b \cdot M_b)^2 + (K_t \cdot M_t)^2}$$

$M_b$  = momento flector.  
 $M_t$  = momento de torsión.  
 $K_b$  = factor de flexión.  
 $K_t$  = factor de torsión.

Los valores de  $K_b$  y  $K_t$  se presentan en la siguiente tabla en función de la forma de actuación de la carga aplicada al eje:

	$K_b$	$K_t$
Carga aplicada gradual	1'5	1
Carga repentina (choque menor)	1'5- 2	1- 1'5
Carga repentina (choque fuerte)	2- 3	1'5- 3

Tabla 1.- Coeficientes A.S.M.E.

Si se trata de ejes del tipo hueco:

$$d^3 = \frac{16}{\sigma_y \times (1 - i^4)} \sqrt{(K_b \times M_b)^2 + (K_t \times M_t)^2}$$

$d_e$  = diámetro exterior.  
 $d_i$  = diámetro interior.  
 $K = \frac{d_e}{d_i}$

En el caso de que sobre los árboles existan simultáneamente tensiones a flexión, torsión y carga axial, la A.S.M.E. ofrece la fórmula:

$$d^3 = \frac{16}{\sigma_y \times (1 - i^4)} \sqrt{\left( \frac{K_b \times M_b}{e} + \frac{a \times F_a \times d_o \times (1 + i^2)}{8} \right)^2 + (K_t \times M_t)^2}$$

$F_a$  = Carga axial.  
 $\alpha$  = es el factor de columna.

$$a = \frac{1}{1 - 0'0044(L/i)} \quad \text{si } L/i < 15$$

$L$  = longitud del eje.  
 $i$  = radio de giro =  $\sqrt{I/A}$ .  
 $I$  = momento de inercia en  $m^4$ .

$A$  = área de la sección transversal del eje en  $m^2$ .

$$a = \frac{\sigma_y}{\sigma_y} \times \frac{1}{E} \times \frac{L}{i} \quad \text{si } L/i > 15$$

$\sigma_y$  = límite de fluencia.  
 $\beta = 1$  si los extremos del eje son articulados.  
 $\beta = 2'22$  si los extremos del eje son empotrados.  
 $\beta = 1'6$  si los extremos del eje son rodamientos.  
 $E$  = módulo de elasticidad.

## TENSIONES ADMISIBLES EN ÁRBOLES

Para el cálculo de árboles se tendrá en cuenta, en lugar del límite de fluencia  $\sigma_y$ , se ha de considerar una resistencia denominada tensión de fatiga  $\sigma_f$  la cual se puede definir como el límite superior de la carga alternativa que puede soportar un árbol un tiempo indefinido.

En el valor de  $\sigma_f$  inciden fundamentalmente:

- El acabado superficial del eje.
- El efecto entalladura.

El valor de  $\sigma_f$  se calcula multiplicando por sendos coeficientes ( $K_{ac}$  = **coeficiente de acabado superficial** y  $K_{ent}$  = **coeficiente de entalladura**) el valor de fatiga permisible por el material sometido a cargas estáticas.

$$\sigma_f = \sigma_y \cdot K_{ac} \cdot K_{ent}$$

Los tipos más usuales de fabricación de árboles que producen efecto entalladura son los que se presentan en la figura siguiente:

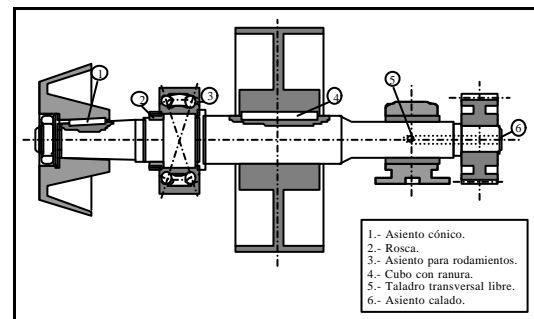


Figura 15.- Entalladuras en árboles.

El coeficiente de acabado superficial  $K_{ac}$  se obtiene según las experiencias de **Klingelnberg** representadas para diferentes casos en la figura siguiente:



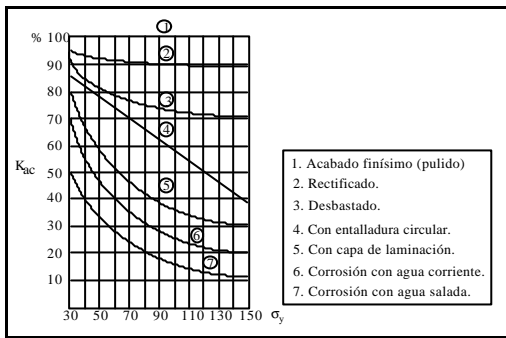


Figura 16.- Valores del coeficiente de acabado superficial en función del límite de fluencia ( $K_p/mm^2$ ).

El *coeficiente de entalladura*  $K_{ent}$  llamado también *coeficiente de cambio de sección*, se calcula mediante la expresión empírica:

$$K_{ent} = \frac{1}{1 + (b_k - 1) \cdot I_k}$$

Los valores de  $b_k$ , cuando de cambio de diámetro se trata, se obtienen de la gráfica empírica de **Lehr** representada en la siguiente figura:

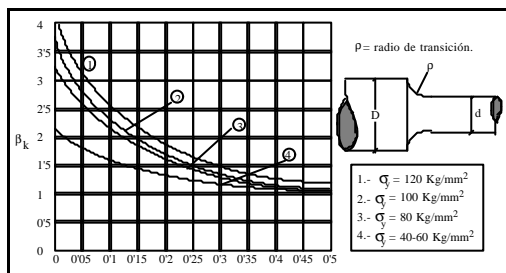


Figura 17.- Valores de  $\beta_k$  en función de  $\rho/d$ .

Los valores de  $I_k$  se obtiene de la gráfica de **Klingelberg** representada en la figura siguiente:

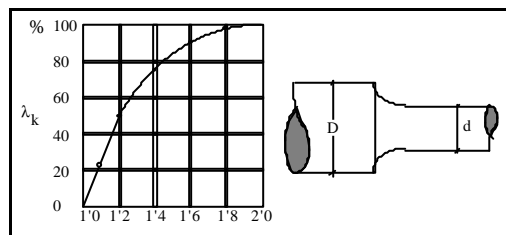


Figura 18.- Valores de  $\lambda_k$  en función de  $D/d$ .

Gráficamente las curvas de **Lehr** y **Thum** permiten obtener los valores de  $s_f$  en árboles con *entalladuras agudas*, con *orificios transversales*, con *chaveteados* y con *culos de compresión*.

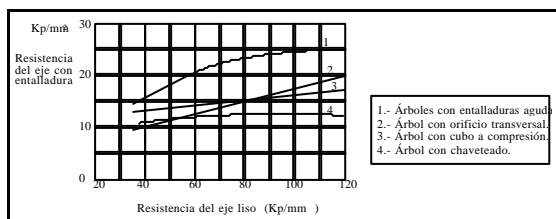


Figura 19.- Valores de  $\sigma_f$  en función de  $\sigma_y$  para diferentes factores.

Un ejemplo ayudará al manejo de este gráfico:

- Sea un eje como el de la figura siguiente con un acabado superficial rectificado.

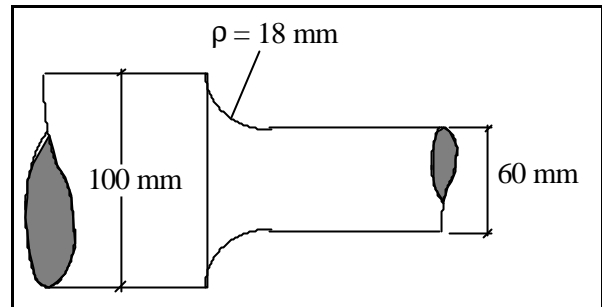


Figura 20.- Árbol con entalladura debida a cambio de diámetro.

Construido con acero de  $\sigma_y = 1200$  MPa.

- Según el tipo de acero usado:

$$s_y = 1200 \text{ N/mm}^2 \text{ } \mathcal{D} \text{ } s_y \gg 120 \text{ Kp/mm}^2$$

- Debido al acabado superficial:

Según el gráfico de la Figura 16:

$$K_{ac} = 0'88$$

- Debido al efecto entalladura:

$$s_y = 120 \text{ Kp/mm}^2; r = 18 \text{ mm } \mathcal{D} \text{ } \frac{r}{d} = 0'3 \text{ } \mathcal{D}$$

Según del gráfico de la Figura 17:

$$b_k = 1'5$$

$$\text{Como } \frac{D}{d} = \frac{5}{3} = 1'66 \text{ } \mathcal{D}$$

Según el gráfico de la Figura 18:

$$I_k = 0'9$$

Por lo que como:

$$K_{ent} = \frac{1}{1 + (b_k - 1) \cdot I_k} \text{ } \mathcal{D} \text{ } K_{ent} = 0'689$$

Por tanto, teniendo en cuenta que:

$$s_f = s_y \cdot K_{ac} \cdot K_{ent} \text{ } \mathcal{D}$$

$$s_f = 120 \cdot 0'88 \cdot 0'689 \text{ Kp/mm}^2$$

$$s_f = 7275 \text{ Kp/mm}^2 = 713 \text{ MPa}$$

## VELOCIDAD CRÍTICA DE EJES

Todos los ejes durante la rotación se deforman debido a su propio peso y al de las cargas que soportan.

La deformación depende de las características del eje, de la distancia entre sus apoyos, de la masa total del eje y de las cargas que actúan.

La deformación adquiere valores máximos a las llamadas velocidades críticas. En algunos casos son tan altas que superan enormemente las velocidades de trabajo de los ejes.

Se puede considerar que:

• **Para un eje simplemente apoyado en sus extremos**, se calcula mediante la expresión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{5 \cdot g}{4 \cdot d}}$$

Siendo:

$\omega_c$  = velocidad angular crítica.  
 $\delta$  = flecha del eje producida por una carga uniformemente distribuida igual a su peso propio por unidad de longitud.

- **Para un eje simplemente apoyado que lleva una masa mucho mayor que la del propio eje**, se calcula mediante la expresión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

Siendo:

$\delta$  = deformación estática o deformación producida por la fuerza P.

Para obtener la expresión:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

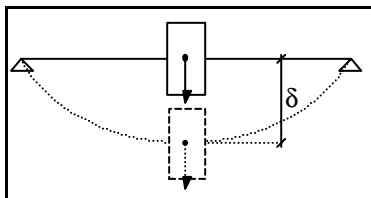


Figura 21.- Deformación estática en árbol simplemente apoyado.

Se iguala la fuerza de deformación con la fuerza centrífuga, con lo que se tiene:

$$K \cdot d = m \cdot (d + e) \cdot \omega^2$$

Operando se tiene:

$$K \cdot d - m \cdot \omega^2 \cdot d = m \cdot e \cdot \omega^2$$

De donde:

$$d = \frac{m \cdot e \cdot \omega^2}{K - m \cdot \omega^2}$$

Si:

$$K = m \cdot \omega^2 \cdot d \cdot \frac{1}{e}$$

Por tanto la velocidad angular crítica es:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Siendo en la demostración anterior:

K = constante elástica del eje.  
 $\delta$  = deformación.  
 m = masa que actúa sobre el eje.  
 $\omega$  = velocidad de giro.  
 e = excentricidad de masa respecto al eje.

Como:

$$m = \frac{P}{g} \cdot \frac{K}{m} = \frac{g \cdot K}{P}$$

Y como:

$$\frac{P}{K} = d \cdot \frac{1}{e} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{g}{d}}$$

• **Para un eje de masa despreciable con varias masas unidas a él**, la velocidad angular crítica se calcula mediante la ecuación de **Rayleigh-Ritz**:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n g \cdot \dot{\delta}_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \dot{\delta}_i \cdot d_i}}$$

Para obtener esta ecuación se iguala la energía cinética de rotación de las masas con la energía de deformación del eje:

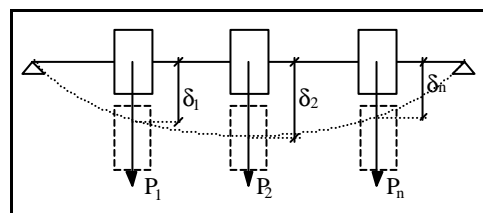


Figura 22.- Deformación en árbol con varias cargas.

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \omega_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot I_n \cdot \omega_n^2$$

Como:  $I_1 = m_1 \cdot d_1^2; I_2 = m_2 \cdot d_2^2 \dots I_n = m_n \cdot d_n^2$

Como:  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = \omega$

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot [m_1 \cdot d_1^2 + m_2 \cdot d_2^2 + \dots + m_n \cdot d_n^2]$$

O bien:

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2$$

La energía de deformación del eje es:

$$W_d = \int_0^d P \cdot dd; \text{ como } P = K \cdot d$$

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot K_1 \cdot d_1^2 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot d_2^2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot K_n \cdot d_n^2$$

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n K_i \cdot d_i^2$$

Igualando ambas energías se tiene:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \cdot d_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i \cdot d_i^2}$$

Como:

$$m = \frac{P}{g} \Rightarrow m_1 = \frac{P_1}{g}; m_2 = \frac{P_2}{g}; \dots m_n = \frac{P_n}{g}$$

Y como:

$$\frac{P}{K} = d \Rightarrow \frac{P_1}{K_1} = d; \frac{P_2}{K_2} = d; \dots \frac{P_n}{K_n} = d$$

Sustituyendo se tiene:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i=1}^n g \cdot \dot{a} P_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \dot{a} P_i \cdot d_i} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n g \cdot \dot{a} P_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \dot{a} P_i \cdot d_i}}$$

La velocidad crítica de un eje cargado con varias masas se puede obtener también usando la ecuación de **Dunkerley**:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$$

Siendo:

$\omega_c$  = velocidad crítica del eje cargado con todas las masas.

$\omega_1$  = velocidad crítica del eje cargado aisladamente con la primera de las cargas.

$\omega_2$  = velocidad crítica del eje cargado aisladamente con la segunda de las cargas.

$\omega_n$  = velocidad crítica del eje cargado aisladamente con la enésima de las cargas.

Unos ejemplos ayudarán a comprender y manejar los conceptos expuestos.

• Un eje soporta un engranaje de masa  $m_1 = 20$  Kg y una polea de masa  $m_2 = 40$  Kg. Las deformaciones estáticas de  $m_1$  y  $m_2$  son  $\delta_1 = 0'031$  mm y  $\delta_2 = 0'076$  mm. Determinar la velocidad crítica.

Solución:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^n \dot{a} P_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \dot{a} P_i \cdot d_i}}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{9'8 \text{ m/s}^2 \cdot (20 \cdot 9'8 \text{ N} \cdot 0'031 \text{ mm} + 40 \cdot 9'8 \text{ N} \cdot 0'076 \text{ mm})}{20 \cdot 9'8 \cdot 0'031^2 + 40 \cdot 9'8 \cdot 0'076^2 \text{ N} \cdot \text{mm}^2}}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 1000 \text{ mm/s}^2 \cdot 35'896 \text{ N} \cdot \text{mm}}{2'452 \text{ N} \cdot \text{mm}^2}}$$

$$\omega_c = 378'58 \text{ rad/s} \approx 3615 \text{ r.p.m.}$$

• Dos masas de 56 Kg y 24 Kg están unidas a un eje. Sabiendo que sus coeficientes de fluencia respectivos son de:

$$a_1 = 1'27 \cdot 10^{-4} \text{ mm/Kg}$$

$$a_2 = 7'62 \cdot 10^{-4} \text{ mm/Kg}$$

Determinar la velocidad crítica del eje.

Solución:

$$d_1 = a_1 \cdot 56 \text{ mm} \Rightarrow d_1 = 7'112 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

$$d_2 = a_2 \cdot 24 \text{ mm} \Rightarrow d_2 = 18'288 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Considerando independientemente cada masa se tiene:

$$\omega_{c_1} = \sqrt{\frac{g}{d_1}} \Rightarrow \omega_{c_1} = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10^3 \text{ mm/s}^2}{7'112 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}}$$

$$\omega_{c_1} = 117386 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{c_2} = \sqrt{\frac{g}{d_2}} \Rightarrow \omega_{c_2} = \sqrt{\frac{9'8 \cdot 10^3 \text{ mm/s}^2}{18'288 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}}$$

$$\omega_{c_2} = 282405 \text{ rad/s}$$

Por tanto aplicando la ecuación de Dunkerley se tiene:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_{c_1}^2} + \frac{1}{\omega_{c_2}^2}$$

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{1173'86^2} + \frac{1}{2824'05^2}$$

$$\frac{1}{\omega_c^2} = 7'257 \cdot 10^{-7} + 1'2538 \cdot 10^{-7}$$

$$\omega_c = 1083'95 \text{ rad/s} \text{ o } 10351 \text{ r.p.m.}$$

Usando la ecuación de Rayleigh-Ritz se tiene:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \cdot \sum_{i=1}^n \dot{a} P_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n \dot{a} P_i \cdot d_i^2}}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{9800 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} \cdot 56 \cdot 98 \cdot 7112 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \cdot 24 \cdot 98 \cdot 18288 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}{56 \cdot 98 \cdot (7112 \cdot 10^{-3})^2 + 24 \cdot 98 \cdot (18288 \cdot 10^{-3})^2} \text{ N} \cdot \text{mm}^2}$$

$$\omega_c = 869'2 \text{ rad/s} \text{ o } 8300 \text{ r.p.m.}$$

## ACOPLAMIENTOS

Son elementos que tienen por objeto transmitir potencia de un árbol a otro.

Existen muchos tipos diferentes de acoplamientos, con características adaptadas a sus diversas formas de aplicación.

De forma genérica se pueden clasificar en:

- Acoplamientos rígidos
- Acoplamientos elásticos.
- Acoplamientos móviles.

Los *acoplamientos rígidos* sirven para unir árboles y su característica fundamental es la de que su montaje exige una perfecta alineación, siendo incapaces de evitar las fatigas o tensiones que aparecen cuando hay problemas de coaxialidad.

Es por lo que este tipo de acoplamientos originan peligrosos esfuerzos cuando la alineación no es perfecta.

Los principales tipos de acoplamientos rígidos son:

- De platos:

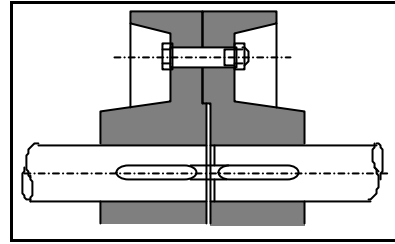


Figura 23.- Acoplamiento de platos

- De manguito:

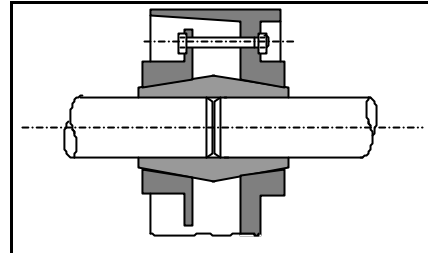


Figura 24.- Acoplamiento de manguito

Los *acoplamientos elásticos* permiten absorber las variaciones de par evitando las fatigas debidas a los impulsos que provocan.

Los acoplamientos elásticos amortiguan los impactos que originan las variaciones bruscas de potencia.

Los principales tipos de acoplamientos elásticos son:

- De casquillo de goma:

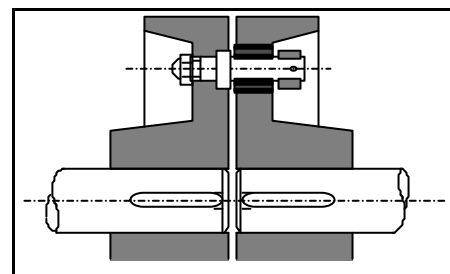


Figura 25.- Acoplamiento de casquillo de goma

- De correa en estrella:

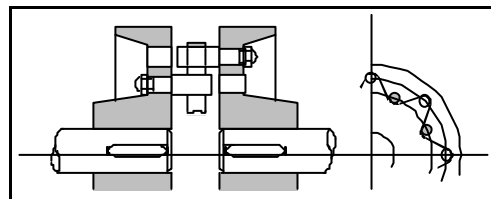


Figura 26.- Acoplamiento de correa en estrella

Los *acoplamientos móviles* permiten eliminar fatigas debido a la falta de coaxialidad entre el motor y el par arrastrado.

Los principales tipos de acoplamientos móviles son:

- De garras:

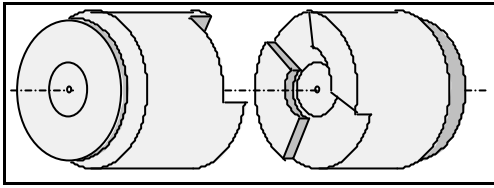


Figura 27.- Acoplamiento de garras

- Oldham:

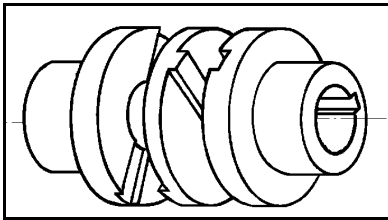


Figura 28.- Acoplamiento tipo junta Oldham

- Cardan:

La junta universal cardan permite transmitir potencia entre ejes no coaxiales y no alineados.

Conocida también como acoplamiento de Hooke es un mecanismo articulado esférico que consiste fundamentalmente en dos horquillas, unidas a los árboles conductor y conducido y una cruz que los acopla.

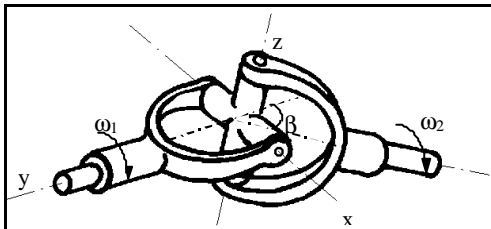


Figura 29.- Junta universal Cardan.

$\beta$  es el ángulo que forman el árbol conductor que gira a una velocidad angular  $\omega_1$  y el árbol conducido que tiene una velocidad  $\omega_2$ .

Los dos árboles conductor y conducido prolongados se cortan en el punto O, lo cual implica que está definido un plano que se designa por  $\pi$ .

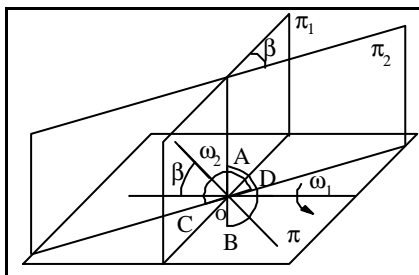


Figura 3.- Planos que contienen ejes y cruzeta.

El brazo de la cruzeta  $a b$  se mueve al girar describiendo sus extremos una circunferencia contenida en un plano perpendicular a  $w_1$  y al plano  $p$  y que pasa por O que se designa por  $p_1$ .

El brazo  $c d$  describe otra circunferencia contenida en un plano perpendicular a  $w_2$  y perpendicular a  $p$  y que pasa por O que se designa por  $p_2$ .

Estos dos planos forman un ángulo  $\beta$  igual al que forman los ejes y las dos circunferencias a las que se ha hecho referencia son círculos de la misma esfera cuyo centro es O.

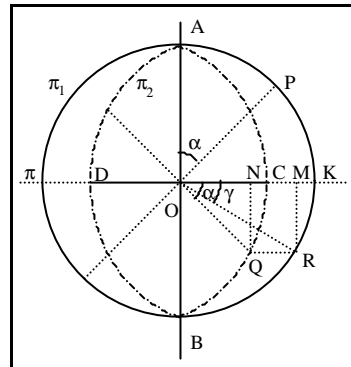


Figura 31.- Movimiento de la cruzeta en el espacio.

Si se proyecta todo sobre  $p_1$  se tiene que el brazo  $a b$  recorre la circunferencia de la figura y que el  $c d$  recorre otra circunferencia cuya proyección sobre  $p_1$  es una elipse siendo:

$$OC = OK \cdot \cos b$$

Si una de las ramas de la cruzeta está en A una rama del conducido estará en C y si la primera recorre un ángulo  $\alpha$  hasta P, la segunda pasará a Q.

El ángulo  $\gamma$  realmente barrido por el elemento conducido mientras que el conductor recorre  $\alpha$  puede hallarse abatido  $p_2$  sobre  $p_1$ .

Al abatir Q se convierte en R. Es decir OR es la longitud real de OQ y  $ROK = \gamma$  es el ángulo abatido.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} g &= \frac{RM}{OM}; \operatorname{tg} a = \frac{QN}{ON} \\ \operatorname{tg} a &= \frac{OM \cdot QN}{ON \cdot RN} = \frac{OM}{ON} = \frac{OK}{OC} = \frac{1}{\cos b} \end{aligned}$$

Resultando:

$$\operatorname{tg} g = \cos b \cdot \operatorname{tg} a \quad (I)$$

La relación entre la velocidades angulares del árbol conducido y del árbol conductor se halla diferenciando la ecuación anterior.

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \cdot \omega_2 = \cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \omega_1$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \quad (\text{II})$$

Eliminando entre (I) y (II)  $\alpha$  o  $\beta$  según convenga, se tiene:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta} \quad (\text{III})$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 - \cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos \beta} \quad (\text{IV})$$

En (III) se observa que  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  es mínimo cuando  $\operatorname{sen} \alpha = 0$  o cuando  $\alpha = 0, \pi$  etc. siendo entonces  $\gamma = 0, \pi$  etc.

También se tiene que  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  es máximo cuando  $\operatorname{sen} \alpha = \pi/2, 3\pi/2$  etc.

Si  $\omega_2$  es constante la relación de las velocidades angulares varía entre los límites  $\cos \beta$  y  $1/\cos \beta$ .

Para un valor de  $\beta$  de  $15^\circ$  la relación de velocidades varía entre 0'966 y 1'037.

Si se hace una representación gráfica situando en abscisas el ángulo que forman los ejes y en ordenadas la diferencia entre los valores máximos y mínimos de la relación de velocidades expresada en % se obtiene para ángulos menores de  $28^\circ$  una curva muy útil para analizar una unión Cardan.

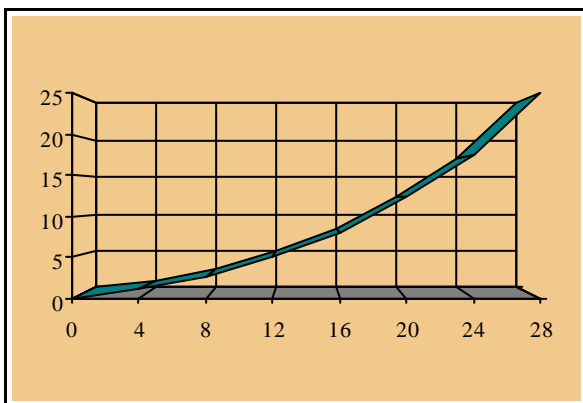


Figura 32.- Relación de velocidad entre árboles.

Estas variaciones en la velocidad dan lugar a fuerzas de inercia, pares, ruido y vibración que no se presentarían si la relación de velocidades fuese constante.

Los valores que toma  $\omega_2$  cuando  $\beta = 30^\circ$ :

$$\omega_2 = \frac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta} \cdot \omega_1 \quad \omega_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{4 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \omega_1$$

Representando la variación de  $\omega_2$  para un valor dado de  $\omega_1$  para diferentes valores de  $\alpha$  en una vuelta completa se tiene:

$\alpha$	$\omega_2/\omega_1$
$0^\circ$	$\sqrt{3}/2$
$30^\circ$	$8 \cdot \sqrt{3}/15$
$60^\circ$	$8 \cdot \sqrt{3}/13$
$90^\circ$	$2 \cdot \sqrt{3}/13$
$120^\circ$	$8 \cdot \sqrt{3}/13$
$150^\circ$	$8 \cdot \sqrt{3}/15$
$180^\circ$	$\sqrt{3}/2$

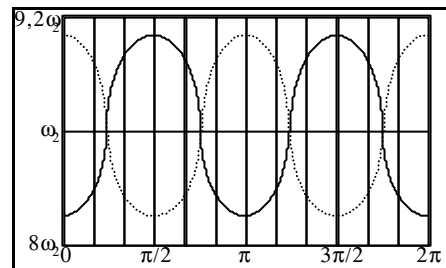


Figura 33.- Velocidad de salida para un valor dado de la velocidad de entrada.

Por tanto existen cuatro instantes en una vuelta completa de la junta en que las velocidades de los dos ejes son iguales. En el resto del tiempo invertido en la vuelta, el elemento conducido gira más deprisa o más despacio que el conductor.

Las acciones sobre los elementos constituyentes de una junta universal son los que se presentan en la figura siguiente:

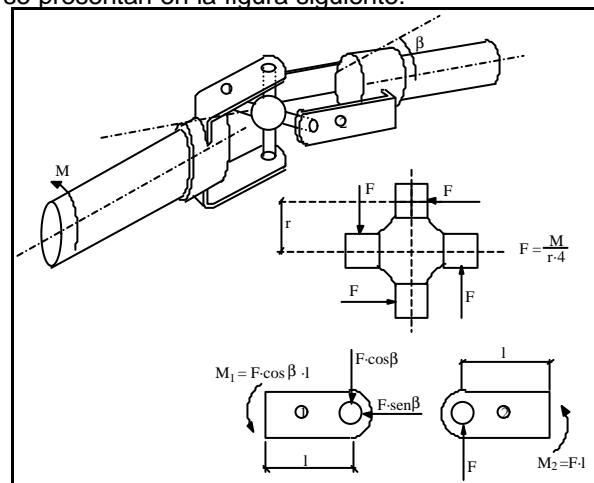


Figura 34.- Distribución de acciones en junta Cardan.

## CHAVETAS, PASADORES Y ESTRÍAS

Las *chavetas*, también llamadas *cuñas* se usan para impedir el movimiento entre el árbol y el elemento conectado a él, cuando se transmite un par desde el primero al segundo.

Las formas más usuales de chavetas son las que se presentan en la Figura 35:

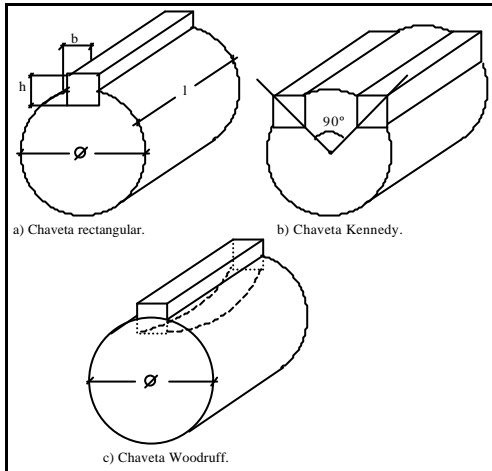


Figura 35.- Tipos usuales de chavetas.

Como norma el ancho de las cuñas es de

$$\frac{1}{4} \cdot \mathcal{A}.$$

Para el cálculo de las cuñas se utiliza como base la potencia transmitida por el eje  $N$  y su régimen de giro  $n$ , de donde se obtiene el par transmitido, según la expresión:

$$M = \frac{N}{n}$$

Una vez calculado el par transmitido, se obtiene la carga que soporta la chaveta mediante la expresión:

$$F = \frac{2 \cdot M}{\mathcal{A}}$$

La fatiga a cortadura se calcula mediante la expresión:

$$t = \frac{F}{b \cdot l}$$

La fatiga a compresión se calcula mediante la expresión:

$$s = \frac{2 \cdot F}{h \cdot l}$$

- Cuando  $b > h$  las chavetas normalmente se pueden romper porque  $s > s_y$ .
- Cuando  $b < h$  las chavetas normalmente se pueden romper porque  $t > t_y$ .

Los *pasadores* se montan mediante su colocación en un taladro pasante entre el árbol y el cubo del elemento, según se muestra en la Figura 36:

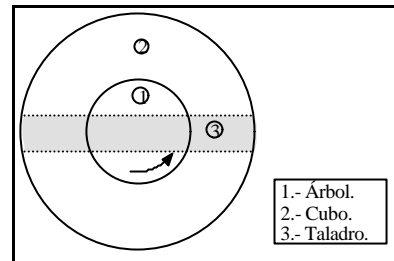


Figura 36.- Pasador de fijación.

El cálculo del pasador se realiza considerando que trabaja a cortadura, para ello si  $N$  es la potencia transmitida por el árbol y  $n$  su régimen de giro, el par transmitido es:

$$M = \frac{N}{n}$$

Si ( $r$ ) es el radio del árbol, la fuerza que actúa sobre el pasador es:

$$F = \frac{M}{r}$$

La fatiga cortante en el pasador viene dada por:

$$t = \frac{2 \cdot F}{\mathcal{P} \cdot \mathcal{A}^2}$$

Siendo:

$\mathcal{O}$  = diámetro del pasador.

Las *estrías* permiten conectar el árbol al elemento con un grado de libertad. Su representación se realiza en la Figura 37:

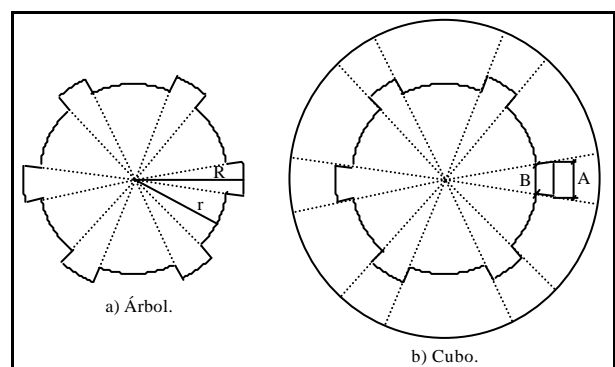


Figura 37.- Estrías para transmisión.

El cálculo de las estrías se realiza a cortadura y a flexión, considerando que la carga actúa en el radio medio y que todas ellas trabajan simultáneamente. Para ello si **N** es la potencia transmitida por el árbol y **n** su régimen de giro, el par transmitido es:

$$M = \frac{N}{n}$$

La carga que soporta cada estría viene dada por la expresión:

$$F = \frac{2 \cdot M}{(R + r)} \cdot \frac{1}{n^{\circ} \text{ de estrías}}$$

La fatiga a cortante que soporta cada estría viene dada por:

$$\tau = \frac{2 \cdot F}{(A + B) \cdot l}$$

Siendo:

A = anchura mayor de cada estría.

B = anchura menor de cada estría.

l = longitud de las estrías.

La fatiga a flexión que soporta cada estría viene dada por:

$$s = \frac{3 \cdot F \cdot (R - r)}{A^2 \cdot l}$$



## TEMA 3 Círculo de Mohr para esfuerzos en 2D

Las dos formas del círculo de Mohr se muestran en la Fig. 1.30, la diferencia son el eje de las ordenadas  $\tau$

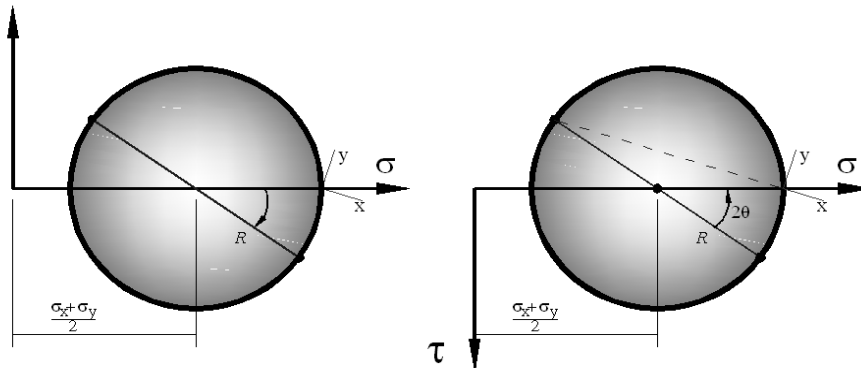


Figura 1.30: Tipos del trazo del círculo de Mohr.

Construcción del círculo de Mohr<sup>1</sup>:

1. Dibujo de un sistema de ejes coordenados con  $\sigma$  como abscisa, positivo hacia la derecha, y  $\tau$  como ordenada, positivo hacia abajo.
2. Localice el centro  $C$  del círculo en el punto con coordenadas  $\sigma_{prom}$  y  $\tau = 0$ .

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

3. Localice el punto  $A$  que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara  $x_1$  del elemento mostrado en la Fig. (1.31), marcando sus coordenadas  $\sigma = \sigma_x$  y  $\tau = \tau_{xy}$ . Note que el punto  $A$  corresponde a  $\theta = 0^\circ$ .
4. Localice el punto  $B$  que representa las condiciones de esfuerzo sobre la cara del elemento mostrado en la fig. (1.31), trazando sus coordenadas  $\sigma = \sigma_y$  y  $\tau = -\tau_{xy}$ . Observe que el punto  $B$  sobre el círculo corresponde a  $\theta = 90^\circ$ .
5. Dibuje una línea del punto  $A$  al  $B$ . Esta línea es un diámetro del círculo y pasa por el centro  $C$ . Los puntos  $A$  y  $B$ , que representan los esfuerzos sobre planos a  $90^\circ$  uno del otro están en extremos opuestos del diámetro (y, por lo tanto, están a  $180^\circ$  uno del otro sobre el círculo).
6. Con el punto  $C$  como centro, trace el círculo de Mohr por los puntos  $A$  y  $B$ . El círculo dibujado de esta manera tiene radio  $R$ .

<sup>1</sup>

- 
-

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

7. Cálculo de los esfuerzos principales y ubicación en la fig. (1.31)

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{prom} \pm R$$

8. Cálculo del ángulo  $\theta$  de la ec. (1.65)

$$2\theta = \tan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

9. Cálculo del esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{m\acute{a}x}$ , y del ángulo  $\beta$ .

$$\tau_{m\acute{a}x} = R$$

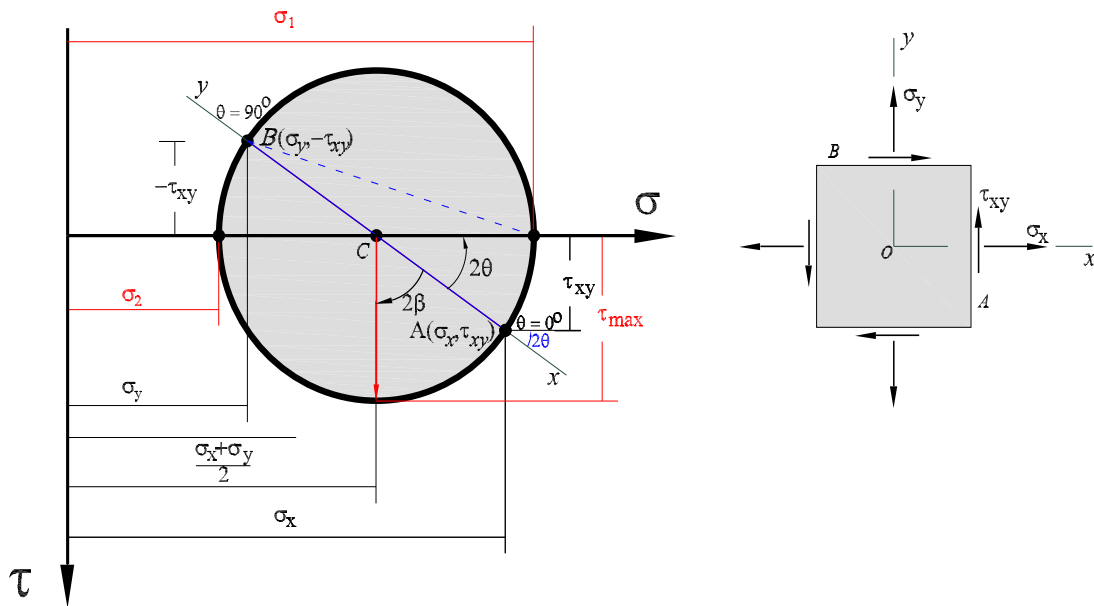


Figura 1.31: Trazo Mohr

### 1.9.1. Ejemplo

Del estado de esfuerzos mostrado en la fig 1.32 determine: a) los esfuerzos, direcciones principales y posibles planos de falla y b) el estado de esfuerzos a un ángulo  $\gamma = 40^\circ$  en dirección contraria a las manecillas del reloj:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 40 & 10\sqrt{3} \\ 10\sqrt{3} & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

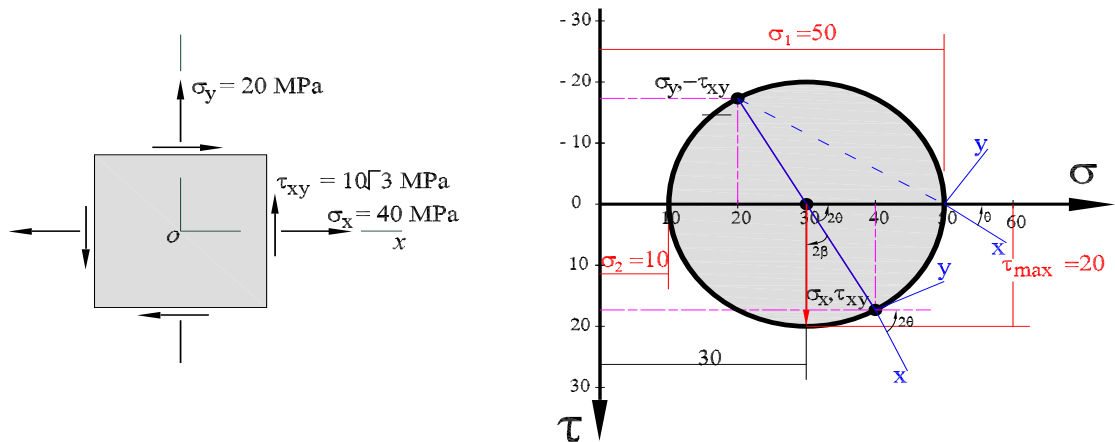


Figura 1.32: Trazo Mohr

### Solución

a) Cálculo del centro

$$\sigma_{prom} = \frac{40 + 20}{2} = 30 \text{ MPa}$$

Cálculo del radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{40 - 20}{2}\right)^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20 \text{ MPa}$$

Cálculo de los esfuerzos principales y ubicación en la fig. (1.32)

$$\sigma_1 = 30 + 20 = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 30 - 20 = 10 \text{ MPa}$$

Cálculo del ángulo  $\theta$  de la ec. (1.65);

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2(10\sqrt{3})}{40 - 20} \right) = 30^\circ$$

El esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{\text{máx}}$ , corresponde al radio del círculo:

$$\tau_{\text{máx}} = R = 20 \text{ MPa}$$

y el ángulo  $\beta$  es:

$$\beta = -15^\circ$$

Los esfuerzos principales y cortante máximo se muestran en la fig. 1.33

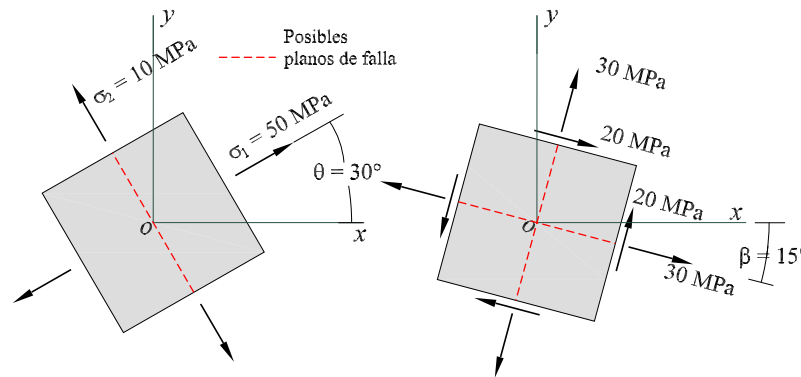


Figura 1.33: Esfuerzos principales y cortante máximo.

b) El ángulo  $2\phi$  se determina gráficamente de la fig. (1.34)

$$2\phi = 2\gamma - 2\theta = 2(40^\circ) - 2(30^\circ) = 20^\circ$$

Los esfuerzos en el plano  $x'$  y  $y'$  se determinan como:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_{prom} + R \cos(2\phi) = 30 \text{ MPa} + 20 \text{ MPa} \cos(20^\circ) = 48,794 \text{ MPa} \\ \sigma_{y'} &= \sigma_{prom} - R \cos(2\phi) = 30 \text{ MPa} - 20 \text{ MPa} \cos(20^\circ) = 11,206 \text{ MPa} \\ \tau_{x'y'} &= -R \sin(2\phi) = -20 \text{ MPa} \sin(20^\circ) = -6,84 \text{ MPa}\end{aligned}$$

### 1.9.2. Ejemplo

Determine los esfuerzos y direcciones principales del estado de esfuerzos en cortante puro mostrado en la fig. 1.32:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Cálculo del centro

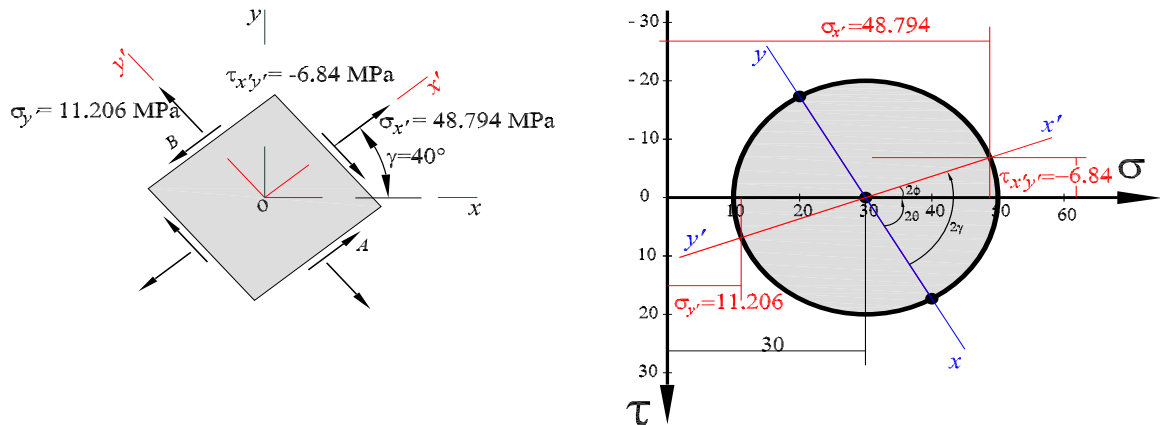


Figura 1.34: Trazo Mohr para un ángulo  $\phi$ .

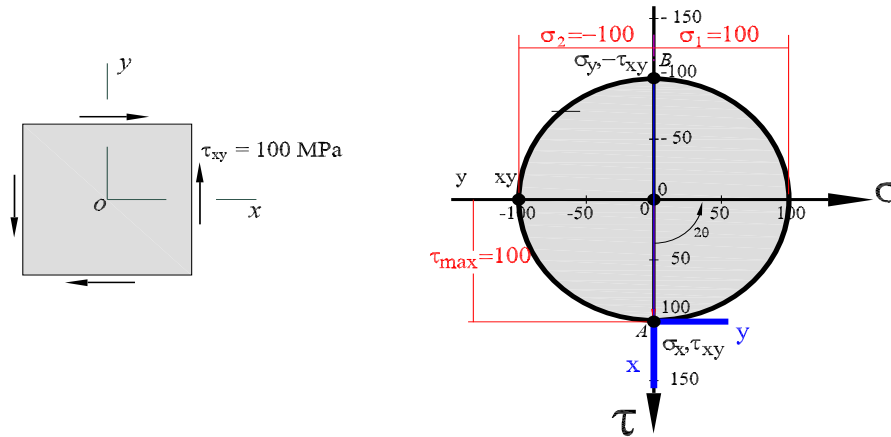


Figura 1.35: Trazo Mohr

$$\sigma_{prom} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Cálculo del radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{0 - 0}{2}\right)^2 + (100)^2} = 100$$

Cálculo de los esfuerzos principales y ubicación en la fig. (1.35)

$$\sigma_1 = 0 + 100 = 100$$

$$\sigma_2 = 0 - 100 = -100$$

El ángulo  $\theta$  se calcula de la ec. (1.65)

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2(100)}{0} \right); \text{ indeterminado}$$

aunque éste sea indeterminado numéricamente, de la Fig. 1.35 se determina que el ángulo es:

$$\theta = \frac{1}{2}(90^\circ) = 45^\circ$$

El esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{\text{máx}}$ , corresponde al radio del círculo:

$$\tau_{\text{máx}} = R = 100$$

ángulo y del ángulo  $\beta$ .

$$\beta = 0$$

Los esfuerzos principales y cortante máximo se muestra en la fig. 1.36

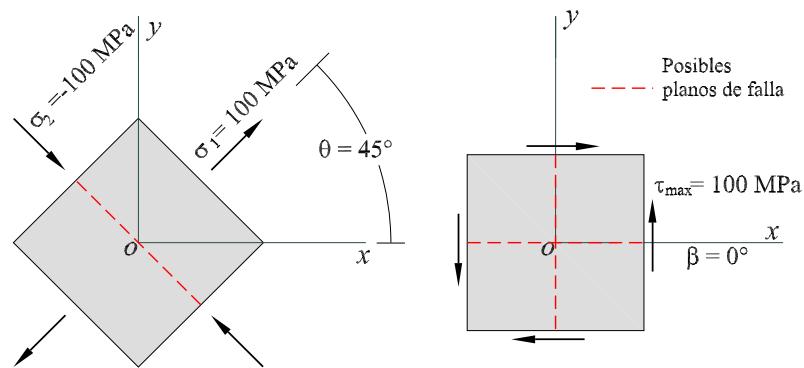


Figura 1.36: Esfuerzos principales y cortante máximo.

### 1.9.3. Ejemplo

Determine los esfuerzos y direcciones principales del estado de esfuerzos en compresión del cilindro de concreto mostrado en la fig 1.32. El tensor de esfuerzos en está dado por.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -250 \end{bmatrix}$$

Cálculo del centro

$$\sigma_{prom} = \frac{0 - 250}{2} = -125$$

Cálculo del radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{0 - 250}{2}\right)^2 + (0)^2} = 125$$

Cálculo de los esfuerzos principales y ubicación en la fig. (1.31)

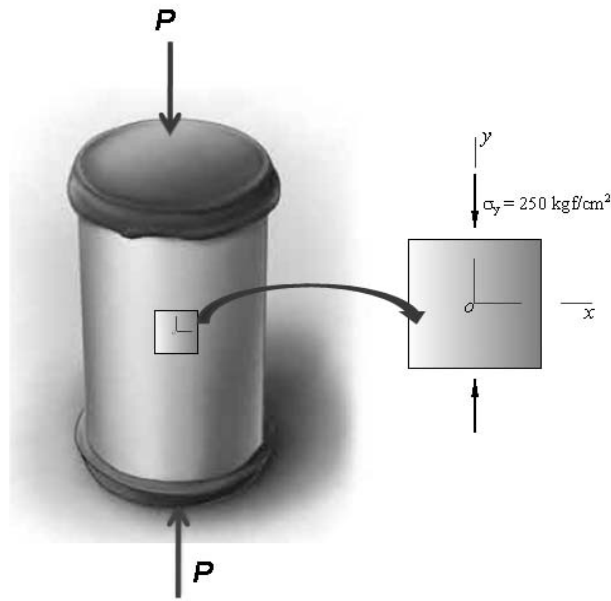


Figura 1.37: Cilindro de concreto sometido a compresión.

$$\sigma_1 = -125 + 125 = 0$$

$$\sigma_2 = -125 - 125 = -250$$

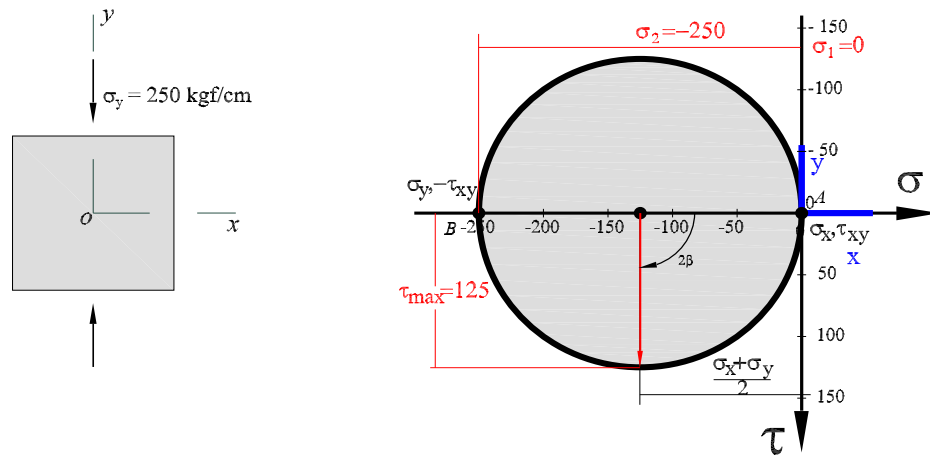


Figura 1.38: Trazo Mohr

El ángulo  $\theta$  se calcula de la ec. (1.65)

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2(0)}{0 + 250} \right)$$

$$\theta = 0^\circ$$

El esfuerzo cortante máximo,  $\tau_{\text{máx}}$ , corresponde al radio del círculo:

$$\tau_{\text{máx}} = R = 125$$

ángulo y del ángulo  $\beta$ .

$$\beta = 45^\circ$$

Los esfuerzos principales y cortante máximo se muestra en la fig. 1.39

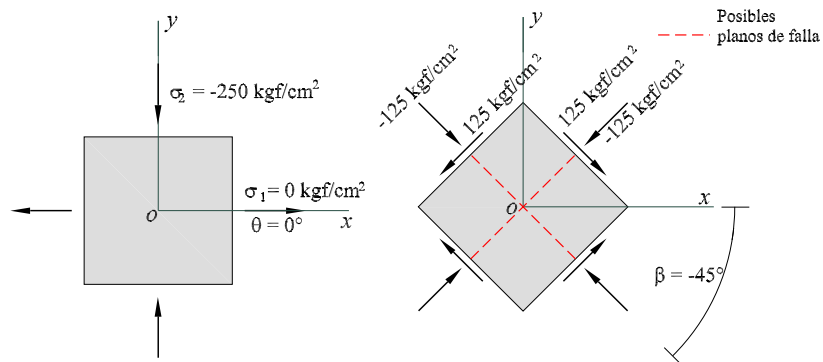


Figura 1.39: Esfuerzos principales y cortante máximo.

### 1.10. Círculo de Mohr para esfuerzos en 3D

Al calcularse los esfuerzos con las raíces de las ec. (1.24), éstos se localizan en el eje de las abscisas de la fig. (1.40).

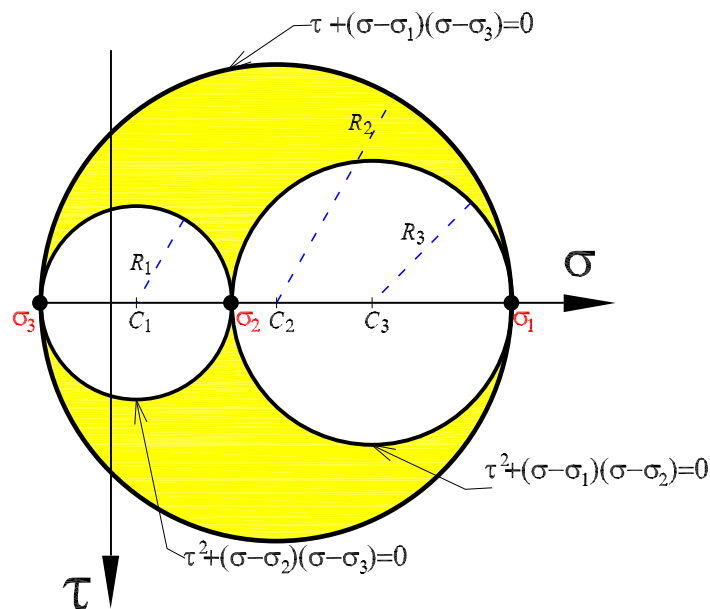


Figura 1.40: Trazo Mohr en 3D.



Los centros y los radios se calculan como:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2} & R_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2} \\ C_2 &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} & R_2 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \\ C_3 &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} & R_3 &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones que delimitan los estados de esfuerzos posibles, sombreado en la fig. (1.40) ,son:

$$\begin{aligned} \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) &\leq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) &\geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

El cortante máximo se calcula como:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

De los estados de esfuerzos en un sistema coordenado cartesiano dado en los siguientes tensores:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1000 & -100 \\ -100 & -800 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -800 & 80 \\ 80 & 500 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1000 & 50 \\ 50 & 500 \end{bmatrix} \quad (1.73)$$

1. Determine y grafique mediante el círculo de mohr los esfuerzos principales y las direcciones, asociadas a éstos.
2. Determine y grafique los esfuerzos cortantes máximos.
3. Grafique los posibles planos de falla.
4. Grafique en una sola figura los tres círculos de la ec. (1.73).
5. Grafique el círculo de mohr en 3D del siguiente sistema estado de esfuerzos.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1009,631 & 0 & 0 \\ 0 & 501,123 & 0 \\ 0 & 0 & -810,754 \end{bmatrix}$$

## CIRCULO DE MOHR

### ESFUERZOS EN EL SUELO ESFUERZOS NORMALES Y TANGENCIALES

Notación:

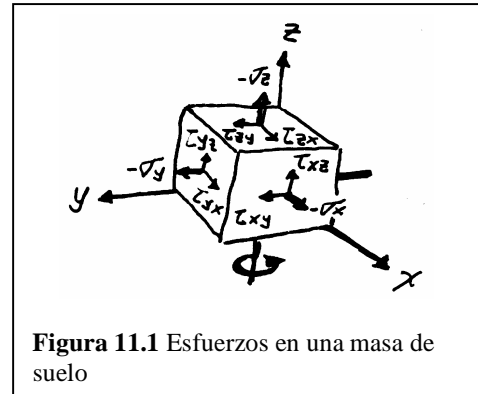
$\sigma$  = Sigma = Esfuerzo normal o directo a la superficie.

$\tau$  = Tau = Esfuerzo de cizalladura o cortante a la superficie.

$\sigma > 0$  = Compresión;  $\sigma < 0$  = Tracción.

$\tau_{zx}$  = Cortante en la dirección X, sobre el plano Z (el plano Z es el plano X - Y).

$\sigma_z$  = Esfuerzo normal y en la dirección Z.



**Figura 11.1** Esfuerzos en una masa de suelo

Sobre las caras del cubo existen 9 elementos (fig. 11.1), las que se pueden escribir así:

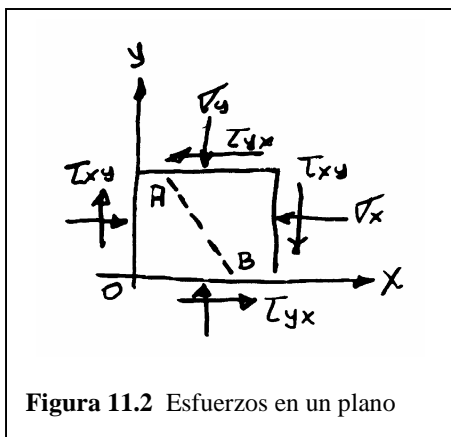
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \sigma = \text{Tensor general de esfuerzos en } R^3 \quad (11.1)$$

Tomando momentos (esfuerzo, por área, por distancia) para hacer rotar el cubo en torno a un eje central paralelo al eje Z e igualando a 0 (cero), tenemos que  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  son los dos esfuerzos que pueden hacerlo.

$$[\tau_{xy} * a^2 * a/2] - [\tau_{yx} * a^2 * a/2] = 0$$

entonces:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (11.2)$$



**Figura 11.2** Esfuerzos en un plano

Reduciendo el problema a dos dimensiones únicamente, (11.1) puede escribirse con sólo 3 componentes y no 4, según (11.2).

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \sigma = \text{Tensor de esfuerzos en } R^2 \quad (11.3)$$

En el plano Z (o X,Y), se dibuja las 4 componentes del esfuerzo. En este caso  $\sigma_x, \sigma_y$  compresivos.  $\tau_{yx}$  se ha hecho  $\tau_{xy}$ . Entonces, de las 4 componentes del esfuerzo, tres son independientes: Las de la ecuación (11.3).

La ecuación (11.3) y la ecuación (11.1) se pueden expresar, para los esfuerzos principales, en  $R^2$  y  $R^3$ , así:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Los tensores expresados en (11.4) suponen una rotación del sistema, hasta que los cortantes se hagan nulos ( $\tau_{ij} = 0$ ), según lo visto en la Sección 10.6.

### 11.2 ESFUERZOS EN UN PLANO.

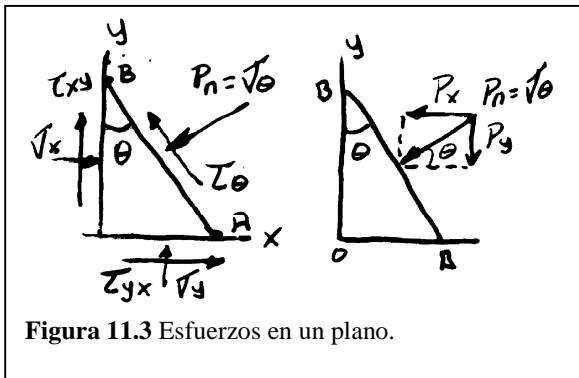


Figura 11.3 Esfuerzos en un plano.

El problema es que, conocido el tensor en  $R^2$ , calcular  $\sigma_\theta$  y  $\tau_\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo del plano con el eje Y (o del esfuerzo normal al plano, con el eje X).

NOTA: La matriz de cosenos directores en  $R^2$  es la del coseno del ángulo de  $(\sigma_\theta, \tau_\theta)$  con  $(X, Y)$ :

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos'x & \cos'y \\ \cos'y' & \cos'y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(90^\circ - \theta) \\ \cos(90^\circ + \theta) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Para (11.9)

Considerando el equilibrio estático, la  $\Sigma F = 0$  .:

$$AB P_X = OB \sigma_X + OA \tau_{XY}; \quad AB P_Y = OA \sigma_X + OB \tau_{XY} \quad (11.6)$$

$$\text{Pero} \quad OA = AB \text{sen}\theta \quad OB = AB \text{cos}\theta \quad (11.7)$$

Llevo (11.7) a (11.6) y cancelo AB

$$P_X = T_X \text{cos}\theta + \tau_{XY} \text{sen}\theta \quad P_Y = \sigma_Y \text{cos}\theta + \tau_{XY} \text{sen}\theta \quad (11.8)$$

$$\text{Pero a) } \sigma_n = P_X \text{cos}\theta + P_Y \text{sen}\theta \quad \text{b) } \tau_n = P_Y \text{cos}\theta - P_X \text{sen}\theta \quad (11.9)$$

(11.8) en (11.9) .: teniendo en cuenta (11.2) y aplicando la identidad de las fórmulas 11.17:

$\sigma_\theta = \sigma_X \text{cos}^2\theta + 2\tau_{xy} \text{sen}\theta \text{cos}\theta + \sigma_Y \text{sen}^2\theta$  que se transforma

$$\sigma_\theta = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \text{cos} 2\theta + \tau_{xy} \text{sen} 2\theta \quad (11.10)$$

$$\tau_\theta = \tau_{xy} (\text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \text{sen}\theta \text{cos}\theta$$

$$\tau_{\theta} = \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta \quad (11.11)$$

$$\text{además, } \operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (11.12)$$

Por convención, los esfuerzos principales son  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . En  $\mathbb{R}^2$   $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (11.13)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (11.14)$$

A veces es conveniente el análisis de los ejes X e Y en la dirección de  $\sigma_1, \sigma_2$ , entonces de (10) y (11), cuando  $\tau_{xy} = 0$ :

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (11.15)$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \quad (11.16)$$

(11.10) – (11.11) – (11.13) – (11.14) – (11.15) y (11.16) se denominan “ECUACIONES PARAMÉTRICAS”

IDENTIDAD	$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$	$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$	(11.17)
-----------	---	---	---------

**11.2.1 El plano de máximo esfuerzo de cizalladura:** Se encuentra con la ecuación (11.16); en ella  $\tau_{\theta}$  es máximo cuando  $\sin 2\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{3} \quad \text{y} \quad \theta = 45^\circ \quad (11.18)$$

**11.2.2 Esfuerzo hidrostático:** Cuando  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (en  $\mathbb{R}^3$ ) y no existe cortante en el material ( $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ). En este caso sólo existe cambio de volumen, elástico o permanente.

**11.2.3. Esfuerzo octaédrico:**  $\sigma_{oct} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$  (11.19)

**11.2.4 Esfuerzo desviador  $\sigma'$ :** Sobre un esfuerzo es del tipo hidrostático, puede darse un esfuerzo adicional normal y en una dirección, llamado esfuerzo desviatorio  $\sigma'$ , que para la dirección 1 es:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \bar{\sigma} = \sigma_1 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_1 &= \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}{3} \\ \sigma'_2 &= \frac{(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)}{3} \\ \sigma'_3 &= \frac{(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{3} \end{aligned} \right\}$$

igualmente:

(11.20)

NOTA: El octaédrico es un invariante

### 11.3 CÍRCULO DE MOHR (Estado bidimensional, $R^2$ )

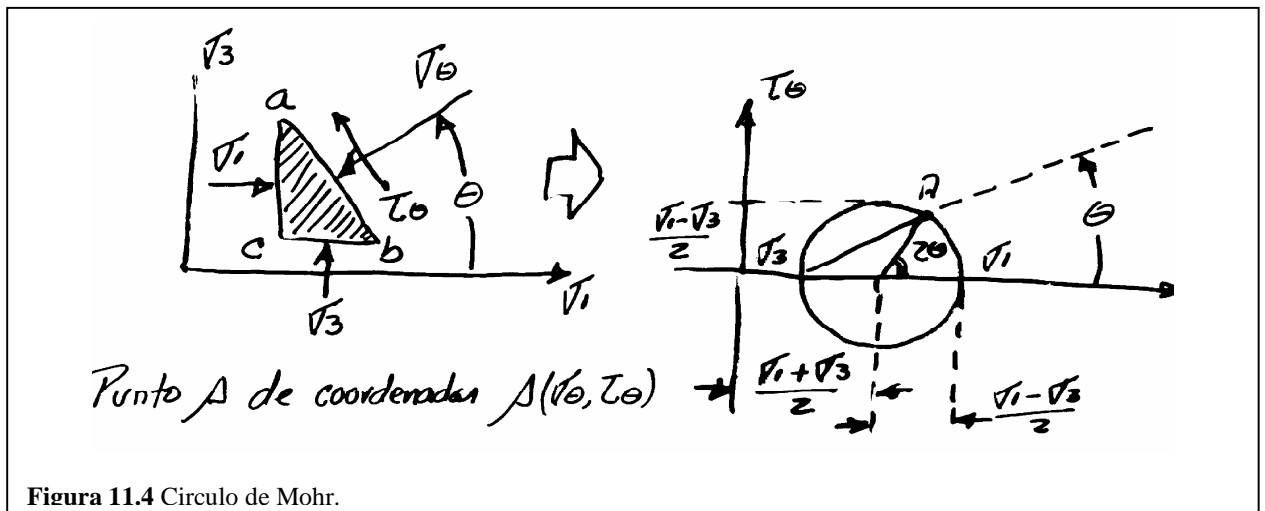


Figura 11.4 Círculo de Mohr.

Consideremos el estado de esfuerzos en el PLANO PRINCIPAL de  $\sigma_3$ , plano en el que actúan los esfuerzos principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , ver Sección 10.6. Asumamos  $\sigma > 0$  en compresión y  $\tau > 0$  en dirección retrógrada. El esfuerzo desviador es la magnitud  $\sigma_1 - \sigma_3$ , diámetro del CÍRCULO DE MOHR, cuyo centro es  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ , con ordenada  $\tau = 0$  en el plano considerado y que definimos como plano  $\sigma_\theta, \tau_\theta$ .

Dada la magnitud y dirección de  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  se pueden calcular los esfuerzos normal  $\sigma_\theta$  y tangencial  $\tau_\theta$ , en cualquier PLANO  $ab$  con dirección  $\theta$  medida en sentido retrógrado a partir de  $\sigma_\theta$ , así:

$$\sigma_\theta = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad (11.21)$$

$$\tau_\theta = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \theta \cos \theta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad (11.22)$$

Comparando (11.21) y (11.22) con las ecuaciones (11.10), (11.11), (11.15) y (11.16), vemos que se ha tomado  $\sigma_3$  por  $\sigma_2$ , para asociarlas al círculo de Mohr.

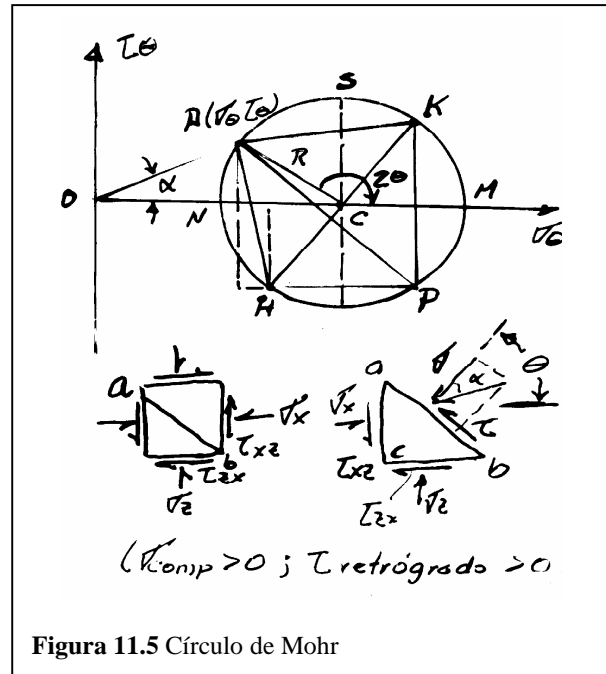
Entonces, EL CÍRCULO DE MOHR tiene por circunferencia el lugar geométrico de puntos, como  $A$ , que representan los esfuerzos sobre un plano, cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$ . El punto  $A$  representa al plano  $ab$ .

**POLO.** La noción de polo es de gran utilidad para las construcciones gráficas del CÍRCULO DE MOHR.

El polo es un punto del círculo de Mohr designado por P, con la siguiente propiedad única: una línea trazada a partir del polo paralela a un plano dado en el suelo, cortará el círculo de Mohr en un punto cuyas coordenadas corresponden a las componentes  $\sigma$  y  $\tau$  del esfuerzo en ese plano.

En consecuencia, existe una relación entre:

1. El estado de esfuerzos en cualquier plano.
2. La dirección de dicho plano del suelo.
3. La posición del polo en el círculo de Mohr.



**Figura 11.5** Círculo de Mohr

**Ejemplo11.1:**

El punto H tiene coordenadas  $(\sigma_z, -\tau_{zx})$  que definen el estado de esfuerzos en cb, por lo que, al trazar por H la línea HP, paralela a cb, obtengo el polo P.

El punto K tiene coordenadas  $(\sigma_z, \tau_{zx})$  que definen el estado de esfuerzos en ac, por lo que al trazar por K la línea KP, paralela a ac, obtengo el polo P.

Ambos puntos P son el mismo; sólo existe un polo P único en el círculo de Mohr.

En consecuencia, al trazar por P una línea PA, paralela a ab, obtengo el punto A, cuyas coordenadas son  $\sigma_\theta$ ;  $\tau_\theta$  (ambos positivos).

El ángulo  $\alpha$  que hace  $\sigma_\theta$  con la resultante de  $\sigma_\theta$  y  $\tau_\theta$ , es el ángulo AON.

Los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son OM y ON.  $\tau_{\text{máximo}}$  es  $CS = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$ .

El ángulo  $\theta$ , es diferente al ángulo  $\alpha$  y vale la mitad del arco ASM

El esfuerzo resultante ab está dado por  $\sqrt{\sigma_\theta^2 + \tau_\theta^2}$

El  $\tau_{\text{máximo}}$  es el radio del círculo de Mohr y este esfuerzo tangencial se produce en planos que forman  $45^\circ$  con el esfuerzo normal mayor  $\sigma_1$ .

Si el estado de ESFUERZOS es GEOSTÁTICO, los  $\tau_{\max}$  estarán sobre planos que hacen  $45^\circ$  con el horizonte y la magnitud de  $\tau_{\max}$ , dependerá de K, el COEFICIENTE DE PRESIÓN DE TIERRAS

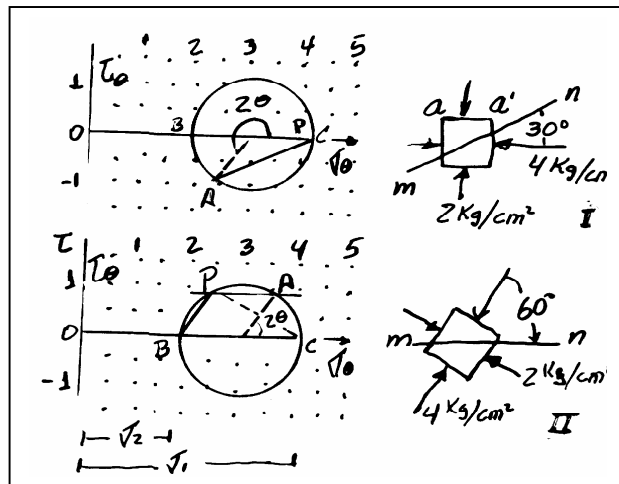
Si  $K = 1 \Rightarrow \tau_{\max} = 0$                       donde  $K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}$

Si  $K \neq 1 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma_v}{2} (K - 1)$

**Ejercicios 11.2** Para las figuras I y II dadas, obtenga los esfuerzos en el plano mn.

Solución gráfica (Para I y II)

- 1)  $\sigma_1 = 4 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\sigma_3 = 2 \text{ Kg/cm}^2$
- 2) dibujo el círculo de Mohr.
- 3)  $\tau_{\max} = R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 1 \text{ Kg/cm}^2$
- 4) Por 2,0 trazo BP paralela al plano sobre el cual actúa el esfuerzo 2,0  $\Rightarrow \sigma = 2$ ;  $\tau = 0$
- 5) Obtengo el polo P donde la paralela BP corta el círculo.
- 6) Por P trazo el plano PA paralelo a "mn" para obtener el punto A.



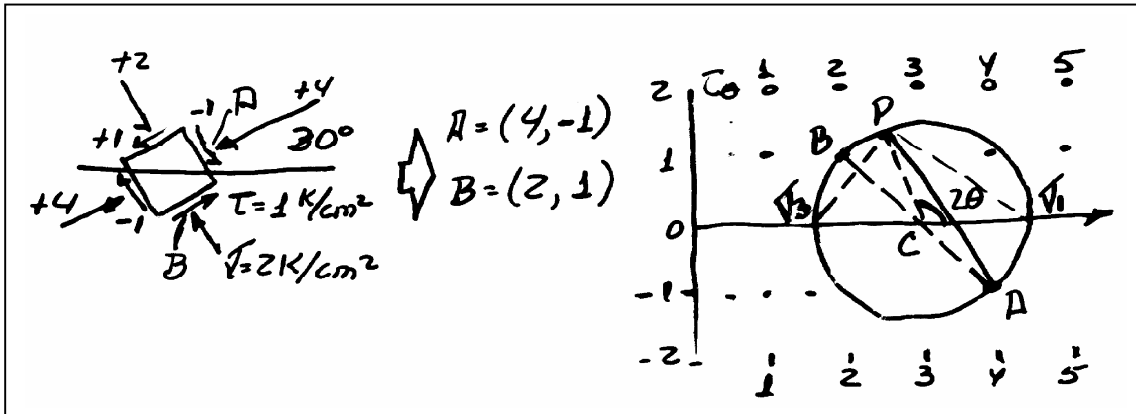
7) Leemos las coordenadas de A, punto que representa al plano mn, esto es:

Caso I :  $\sigma_\theta = 2,5 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\tau_\theta = -0,87 \text{ Kg/cm}^2$                        $\theta = 120^\circ$

Caso II :  $\sigma_\theta = 3,5 \text{ Kg/cm}^2$ ;  $\tau_\theta = 0,87 \text{ Kg/cm}^2$                        $\theta = 30^\circ$

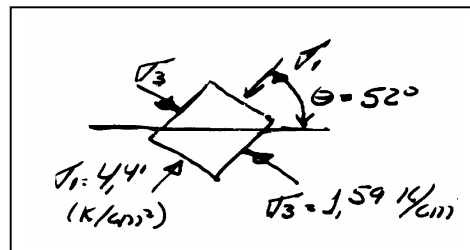
Otra solución: Los pasos 1, 2 y 3 iguales, lo mismo los pasos 6 y 7. El paso 4 puede ser: Por 4,0 trazo CP paralela al plano sobre el cual actúa el esfuerzo 4,0. El paso 5, obtener con CP el polo P y listo.

**Ejercicio 11.3.** Obtener gráfica y analíticamente  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\theta$  de la figura:



Solución gráfica.

- 1) Sitúo en el plano los puntos A(4, -1) y B(2, 1), que son las caras A y B. Los signos,  $\sigma > 0$  en compresión y  $\tau > 0$  en sentido retrógrado.
- 2) El diámetro y el radio, gráficamente son definibles, a partir de A y B.
- 3) Por A, trazo AP paralela a la cara A, para obtener el polo P. (Este paso también puede ser: Por B trazo BP paralela a la cara B).
- 4) Uno  $P\sigma_1$  y  $P\sigma_3$ . Estas son dos rectas paralelas a los planos principales sobre los que actúan  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , de magnitudes ya conocidas.
- 5) En el círculo ya se lee  $PC\sigma_0 = 2\theta$  y  $P\sigma_2\sigma_1 = \theta$
- 6) Dibujo el elemento de suelo, con  $\theta$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  de acuerdo al círculo de Mohr obtenido.



Solución analítica

Con las ecuaciones 11.12, 11.13, 11.14, tenemos:

$$\theta' = \frac{1}{2} \operatorname{ar\,tg} \left[ \frac{-2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{ar\,tg} \left[ \frac{-2(-1)}{(4-2)} \right] = +22^\circ 30' \quad (*)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = \frac{1}{2}(4+2) + \frac{1}{2} [(4-2)^2 + 4(1)^2]^{1/2} = 4,41 \text{ Kg/cm}^2$$

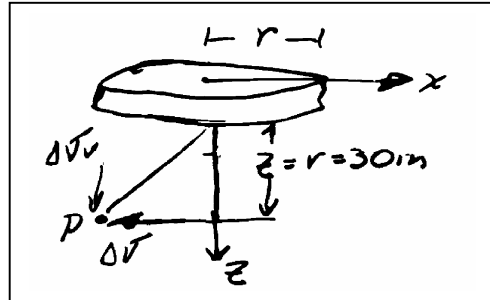
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} = \frac{1}{2}(4+2) - \frac{1}{2} [(4-2)^2 + 4(1)^2]^{1/2} = 4,41 \text{ Kg/cm}^2 = 1,59 \text{ Kg/m}^2$$

(\*) Como el ángulo  $\theta$  real es el que hace  $\sigma_1$  con el horizonte, entonces



$$\theta \text{ o } 30^\circ + \theta' = 30^\circ + (+22^\circ \frac{1}{2}) = 52^\circ \frac{1}{2}$$

**Ejercicio 11.4.** Se tiene una carga de 25 Ton/m<sup>2</sup> uniformemente repartida sobre una superficie circular de 30m de radio. Para una profundidad Z = 30m bajo el borde de la superficie cargada calcular el  $\Delta\sigma_n$  y las direcciones de  $\Delta\sigma_1$  y  $\Delta\sigma_2$ . Para  $\sigma_v$ ,  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  (ábacos Figuras 10.14 y 10.17)



Solución: Se dibuja el círculo de Mohr con los  $\Delta\sigma$ , y con una horizontal por  $\Delta\sigma_x$  localizo el polo P.

- a) Ábacos:  $\frac{Z}{r} = 1$  y  $\frac{x}{r} = 1$ : (ábacos III de LAMBE Figura 10.17)

$$\frac{\Delta\sigma_1}{q} = 0,44; \quad \frac{\Delta\sigma_3}{q} = 0,04; \quad \frac{\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3}{q} = 0,40 \quad (\text{borde del tanque y } Z = r)$$

(borde del tanque y  $Z = r$ )

- 
- $\Delta\sigma_1 = 0,44q = 0,44(25) = 11 \text{ TT/m}^2$  incremento en  $\sigma_1$
- $\Delta\sigma_2 = 0,04q = 0,04(25) = 1 \text{ TT/m}^2$  incremento en  $\sigma_2$

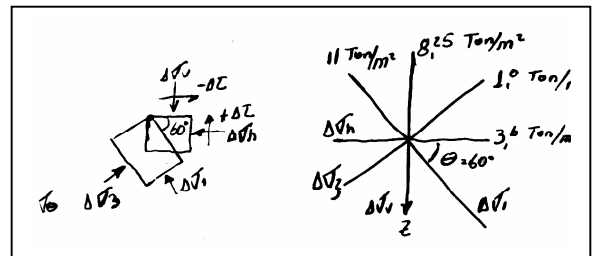
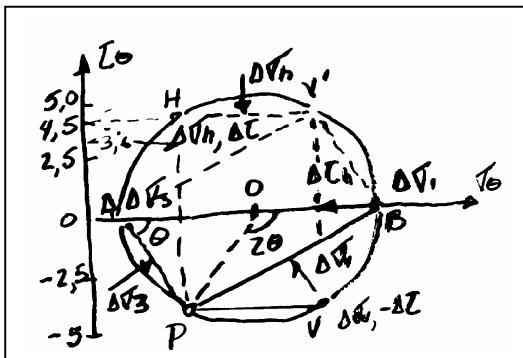
- b) Ábaco Foster – Ahlvin (donde R es X)

$$\frac{Z}{r} = 1; \quad \frac{X}{r} = 1 \Rightarrow I_0 = 0,33 \quad (\text{para borde del tanque y } Z = r)$$

$$\Delta\sigma_v = q I_0 = 25(0,33) = 8,25 \text{ TT/m}^2 \quad \text{incremento en } \sigma_v$$

Como  $\Delta\sigma_2 < \Delta\sigma < \Delta\sigma_1$  existe cortante  $\tau$  sobre el plano horizontal.

- c) Construcción del círculo de Mohr:



$$R = \frac{11-1}{2} = 5; \quad O = \frac{11+1}{2} = 6$$

Con  $\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_v = 8,25$  obtengo  $VV'$

Por la simetría del círculo, existen dos puntos con diferente  $\tau$ . Escojo V con  $\tau < 0$ .

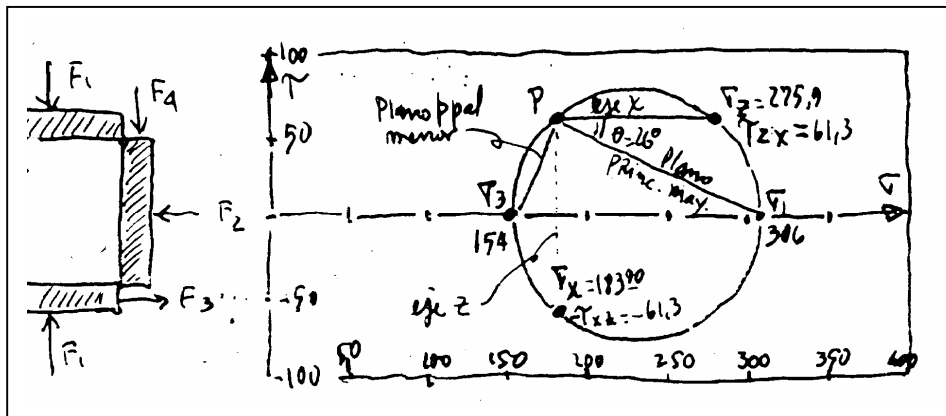
Con VP || horizonte, obtengo P (polo).

Con PH  $\perp$  al horizonte obtengo H. Se lee  $\Delta\sigma_h = 3,6$ ;  $\Delta\tau = 4,5$

Uniendo P con A y B obtengo los planos principales. El ángulo  $\theta$ , de  $V_i$  con X:

$\sigma_i$  actúa sobre el plano BP. Luego  $\theta = \text{ángulo BAP} = \text{ar tg}\left[\frac{4,5}{3,6-1,0}\right] = -60^\circ$

**Ejercicio 11.5.** Con la figura, las cargas normales aplicadas en las caras de un cubo de suelo son  $F_1 = 45 \text{ Kg}$  y  $F_2 = 30 \text{ Kg}$ ; las cargas cortantes son  $F_3 = F_4 = 10 \text{ Kg}$ . La arista de suelo es de  $40 \text{ mm}$ . Construya el círculo de Mohr de los esfuerzos totales y obtenga los planos y esfuerzos.



### Solución

Se definen los ejes X y Z de la figura y se tienen como base la dirección de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ .

Luego se calculan

$$\sigma_x = F_2/A = 183,9 \text{ KN/m}^2$$

$\sigma_z = F_1/A = 275,9 \text{ KN/m}^2$  y el cortante  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = F_3/A = 611,3 \text{ KN/m}^2$ .  $\tau_{xz} < 0$  por el sentido negativo y  $\tau_{zx} > 0$  por el sentido retrógrado.

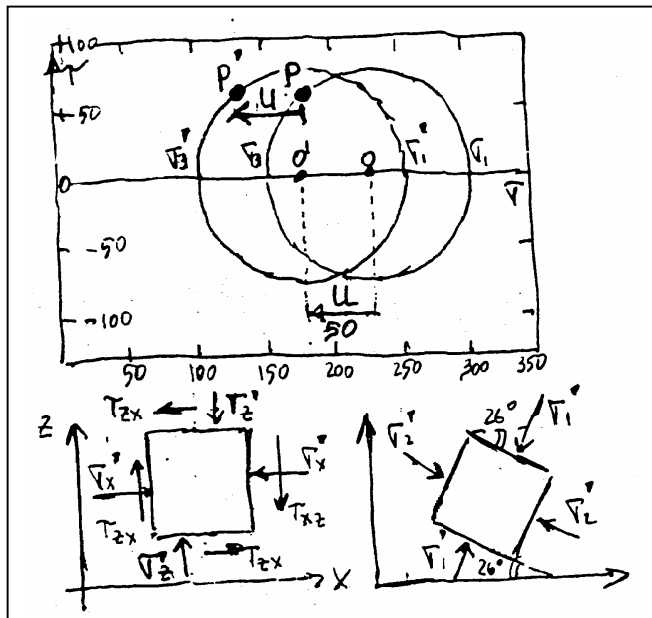
El polo P se localiza desde  $(\sigma_z; \tau_{zx})$  y el plano principal mayor genera  $\theta = 26^\circ$  con X.

**Ejercicio 11.6.** Partiendo de los esfuerzos totales del cubo del ejercicio anterior, y conociendo que la presión de poros es  $U = 50 \text{ KN/m}^2$ , construya el círculo de Mohr de los esfuerzos efectivos.

Dibuje el polo en el nuevo círculo, de esfuerzos efectivos, y dibuje los cubos sobre cuales caen los esfuerzos efectivos normales y cortantes.

Solución: El agua no tiene resistencia al corte.  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 61,3 \text{ KN/m}^2$ .

Además,  $OO' = U = 50 \text{ KN/m}^2$ .



P' se desplaza hacia atraz  $50 \text{ KN/m}^2$ .

$$\sigma'_x = \sigma_x - U = 183,9 - 50 = 133,9 \text{ KN/m}^2$$

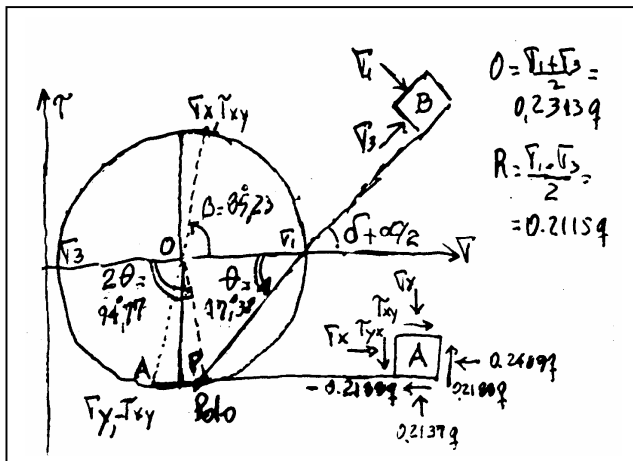
$$\sigma'_z = \sigma_z - U = 275,9 - 50 = 225,9 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - U = 306 - 50 = 256 \text{ KN/m}^2$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - U = 154 - 50 = 104 \text{ KN/m}^2$$

Nota: Se obvia el cálculo con fórmula

**Ejercicio 11.7.** Para la figura, la ecuación de esfuerzos principales está dada por  $\sigma_1 = \frac{q}{\pi}(\alpha + \text{sen } \alpha)$   $\sigma_3 = \frac{q}{\pi}(\alpha - \text{sen } \alpha)$  y la dirección de  $\sigma_1$  bisecta el ángulo  $\alpha$ . Calcule  $\sigma_x$  (horizontal), el  $\sigma_y$  (vertical) y  $\tau_{xy}$  en el punto A ( $x = 0,75B$ ;  $y = B/2$ )



(ver expresiones 10.11, para fajas con carga uniforme q)

$$\alpha + \delta = \text{arctg} \frac{X + B/2}{Y} = \text{arctg} 2,5 = 68^\circ,20$$

$$\delta = \text{arctg} \frac{X - B/2}{Y} = \text{arctg} 0,5 = 26^\circ,57$$

$$\alpha = 68^\circ,20 - 26^\circ,57 = 41^\circ,63$$

$$\delta + \frac{\alpha}{2} = 26^\circ,57 + \frac{41^\circ,63}{2} = 47^\circ,38 = \theta$$

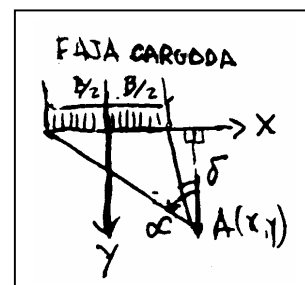
$$\sigma_1 = \frac{q}{\pi} (0,7267 + \text{sen } 41^\circ,63) = 0,4428q$$

$$\sigma_3 = \frac{q}{\pi} (0,7267 - \text{sen } 41^\circ,63) = 0,0198q$$

Con  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  se dibuja el círculo, con centro en  $O = 0,2313q$  y radio  $R = 0,2115q$ .

Como la dirección de  $\sigma_1$  bisecta el ángulo  $\alpha$ , entonces  $A = \delta + \frac{\alpha}{2} = 47^\circ,38$ .

Con  $\theta$ , gráficamente obtengo el polo P. Por P trazo PA horizontal y obtengo el plano sobre el cual actúa el esfuerzo vertical pedido; este es  $A(\sigma_y; -\tau_{xy})$ .



Para calcular A, calculo  $\beta \Rightarrow \beta = 180^\circ - 2\theta = 180^\circ - 94,77 = 85,23$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_y}{2} - R \cos \beta = 0,2313q - 0,0176q = 0,2137q$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_y}{2} + R \cos \beta = 0,2313q + 0,0176q = 0,2489q$$

$$\tau_{xy} = R^2 \sin \beta = 0,2115q * \sin 85,23 = 0,2108q$$

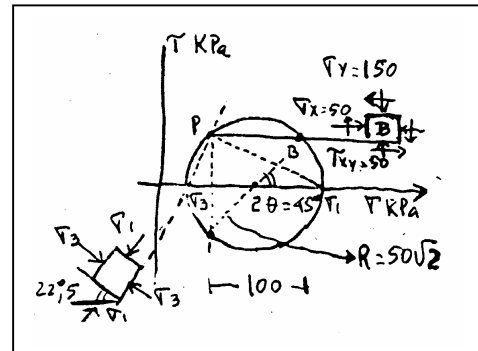
**Ejercicio 11.8.** Dado el plano B con los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  en KPa (150, 50 y 50); calcular  $\theta$ , el polo,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y su orientación.

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{-2 * 50}{50 - 150}\right) = 22,5$$

Fórmula 11.12

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = 100 + 70,7 = 170,7 \text{ KPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = 100 - 70,7 = 29,3 \text{ KPa}$$



### ESTADOS ESPECIALES DE ESFUERZOS

	<p>Compresión triaxial simple, <math>\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z</math> <math>\tau = 0</math></p>		<p>Tracción y compresión iguales  <math>\sigma_z = 0</math> <math>\sigma_x = -\sigma_y</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_x</math>  <math>\tau_{yz} = \tau_{xz} = \sigma_x/2</math></p>
	<p>Compresión biaxial igual  <math>\sigma_x = \sigma_y</math> pero <math>\sigma_z = 0</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_x/2 = \sigma_y/2</math></p>		<p>Cortante puro y plano  <math>\sigma_z = 0</math>  <math>\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y</math></p>
	<p>Tracción simple  <math>\sigma &lt; 0</math> pero <math>\sigma_y = \sigma_z = 0</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \sigma_x/2</math></p>		
	<p>Tracción con presión lateral  <math>\sigma_y = \sigma_z = -\sigma_x</math>  <math>\tau_{m\acute{a}x} = \tau_{xy} = \tau_{xz}</math></p>		

Figura 11.6 Estados especiales de esfuerzos

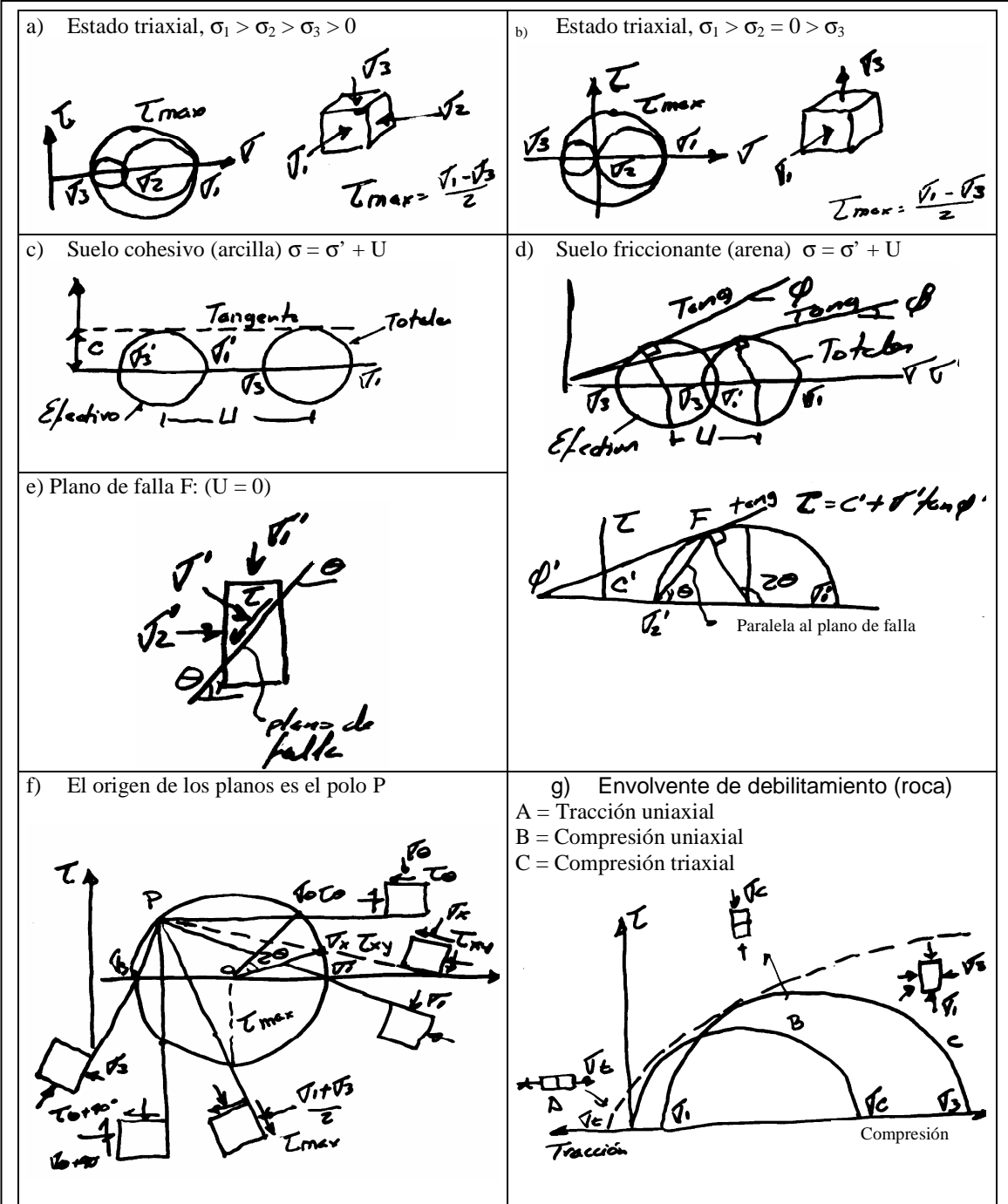


Figura 11.7 Otros estados y situaciones de interés.

**11.4 DIAGRAMA p - q:**

Para dibujar una trayectoria de esfuerzos, de un ensayo, no es fácil el dibujar una sucesión de círculos de Mohr, por lo que la literatura moderna utiliza los diagramas p - q, donde cada círculo tiene un punto de coordenadas (p, q), cuya sucesión da la TRAYECTORIA DE ESFUERZOS.

Si  $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  y  $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{\max}$  puedo dibujar las siguientes trayectorias:

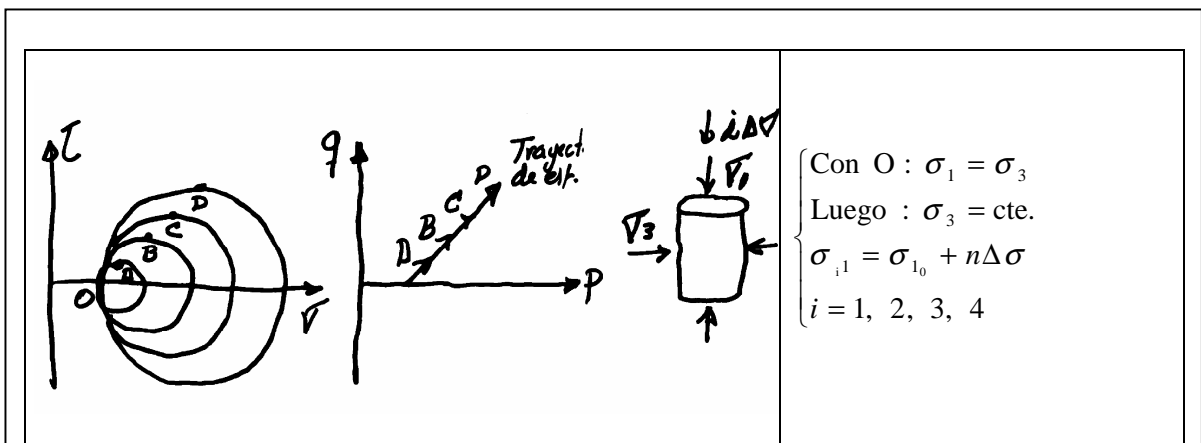


Figura 11.8. I Trayectorias de esfuerzos.

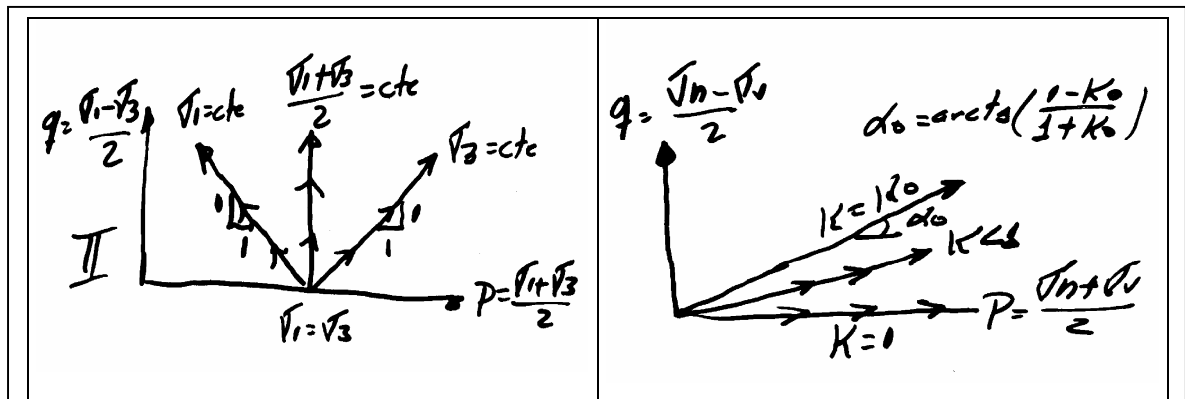


Figura 11.9 Trayectorias de esfuerzos

## FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN VIGAS.

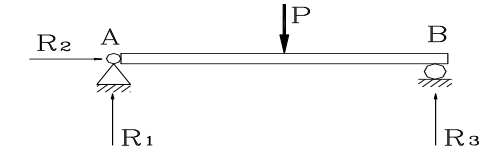
### 1.1.-TIPOS DE VIGAS.

De acuerdo al número y tipo de los apoyos que soportan la viga, existen dos grandes grupos de vigas:

1.1.1 Vigas Isostáticas o estáticamente determinadas: en estas vigas el número de reacciones externas coincide con el número de ecuaciones de equilibrio disponibles. No sobra ni faltan reacciones para que el sólido permanezca en equilibrio estable, tiene grado de indeterminación (G.I.) cero. A continuación se muestran algunos ejemplos:

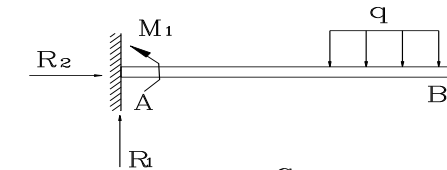
a-Viga simplemente apoyada de un tramo:

$$\begin{aligned} \# \text{ Reacciones} &= 3 \\ \# \text{ Ecuaciones} &= \underline{-3} \quad (\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A) \\ \text{G.I.} &= 0 \end{aligned}$$



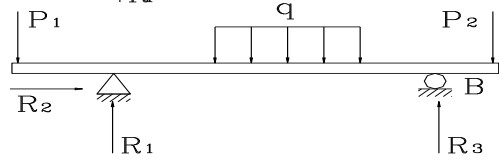
b-Viga en cantiliver, voladizo o ménsula:

$$\begin{aligned} \# \text{ Reacciones} &= 3 \\ \# \text{ Ecuaciones} &= \underline{-3} \quad (\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A) \\ \text{G.I.} &= 0 \end{aligned}$$



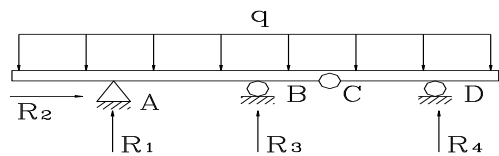
c-Viga simplemente apoyada con volados:

$$\begin{aligned} \# \text{ Reacciones} &= 3 \\ \# \text{ Ecuaciones} &= \underline{-3} \quad (\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A) \\ \text{G.I.} &= 0 \end{aligned}$$



d-Viga continua de dos tramos, con volados y articulación:

$$\begin{aligned} \# \text{ Reacciones} &= 4 \\ \# \text{ Ecuaciones} &= \underline{-4} \quad (\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A, \Sigma M_C^{\text{izq}} \text{ o } \Sigma M_C^{\text{der}}) \\ \text{G.I.} &= 0 \end{aligned}$$



1.1.2 - Vigas hiperestáticas o estáticamente indeterminadas: presentan un número mayor de reacciones externas que de ecuaciones de equilibrio disponibles, lo cual significa que estas vigas presentan al menos una condición de sujeción adicional a las mínimas requeridas para que se mantenga en equilibrio estable, es decir, tienen

reacciones sobrantes, cuya eliminación las convertiría teóricamente en isostáticas. A continuación se muestran algunos ejemplos:

a- Viga empotrada y apoyada en un rodillo:

# reacciones = 4

# ecuaciones =  $\underline{-3}$  ( $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A$ )

G.I. = 1

b- Viga empotrada- empotrada:

# reacciones = 6

# ecuaciones =  $\underline{-3}$  ( $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A$ )

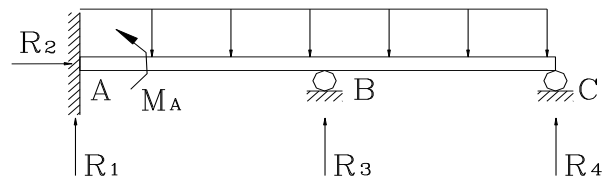
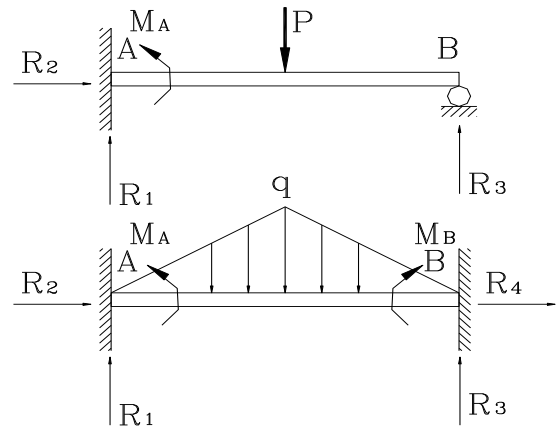
G.I. = 3

c- Viga de dos tramos empotrada y apoyada:

# reacciones = 5

# ecuaciones =  $\underline{-3}$  ( $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_A$ )

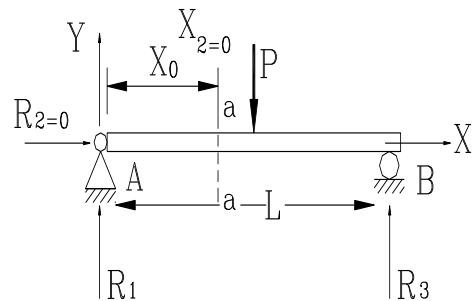
G.I. = 2



## 1.2- DEFINICIÓN DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.

En la figura se muestra una viga horizontal elemental, isostática de un solo tramo, con una carga puntual "P", en la sección a-a se hace un corte imaginario para observar las fuerzas internas que aparecen para satisfacer las condiciones de equilibrio, tal como se muestra en el diagrama de

cuerpo libre de abajo.



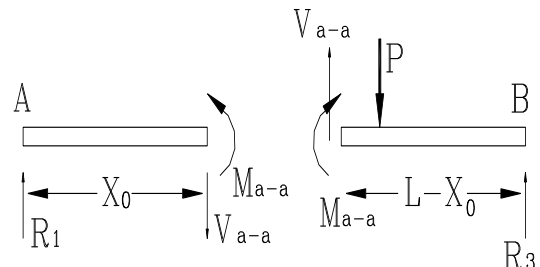
**1.2.1 - Fuerza Cortante:** del equilibrio de

fuerzas verticales practicado a cualquiera

de los dos segmentos de viga separados,

aparece una fuerza interna "Va-a", llamada

resistente, debido a que se opone al efecto



de las fuerzas activas externas, cuya dirección es perpendicular al eje longitudinal de la viga AB, el cual coincide a su vez con el eje "X" del sistema de referencia particular "XY"

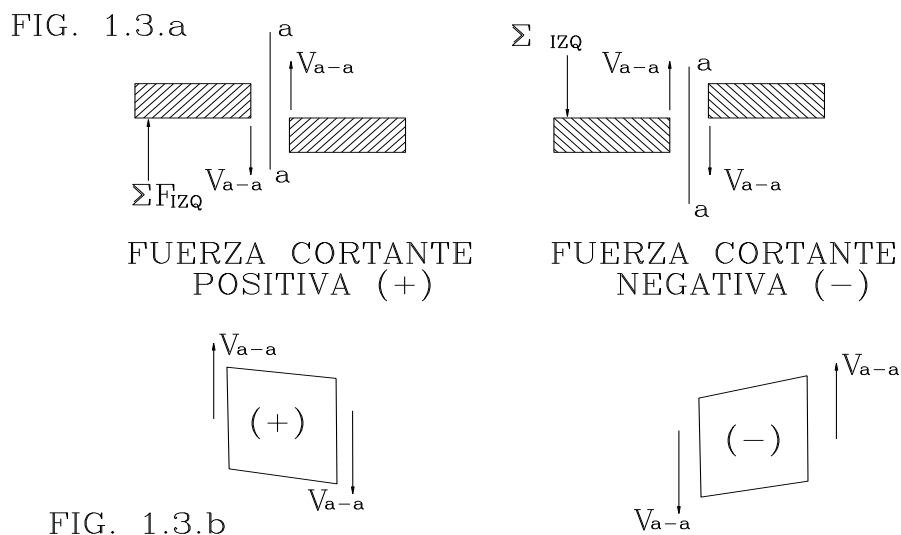


de la viga . Para el caso de vigas inclinadas la fuerza cortante  $V_{a-a}$ , tiene la misma inclinación, puesto que se orienta según el eje particular de la viga y no según el sistema global vertical-horizontal.

En este sentido se define la **fuerza cortante como la sumatoria de la componente perpendicular al eje, de las fuerzas externas situadas a la izquierda o a la derecha de la sección de viga estudiada:**

$$V_{a-a} = \Sigma F_{y_{a-a}}^{izq} = \Sigma F_{y_{a-a}}^{der}$$

La convención de signos más común, es aquella que considera positiva la fuerza cortante que hace deslizar hacia arriba, la porción de viga situada a la izquierda de la sección estudiada, en caso contrario se considera negativa. En otras palabras cuando la sumatoria de fuerzas a la izquierda de la sección es positiva la fuerza cortante tiene el mismo signo, igual para el caso contrario, tal como se muestra en el siguiente diagrama fig 1.3.a. En la Fig. 1.3.b. se muestra la convención de signos desde el punto de vista de la deformación de un elemento diferencial situado justo en la sección a-a.

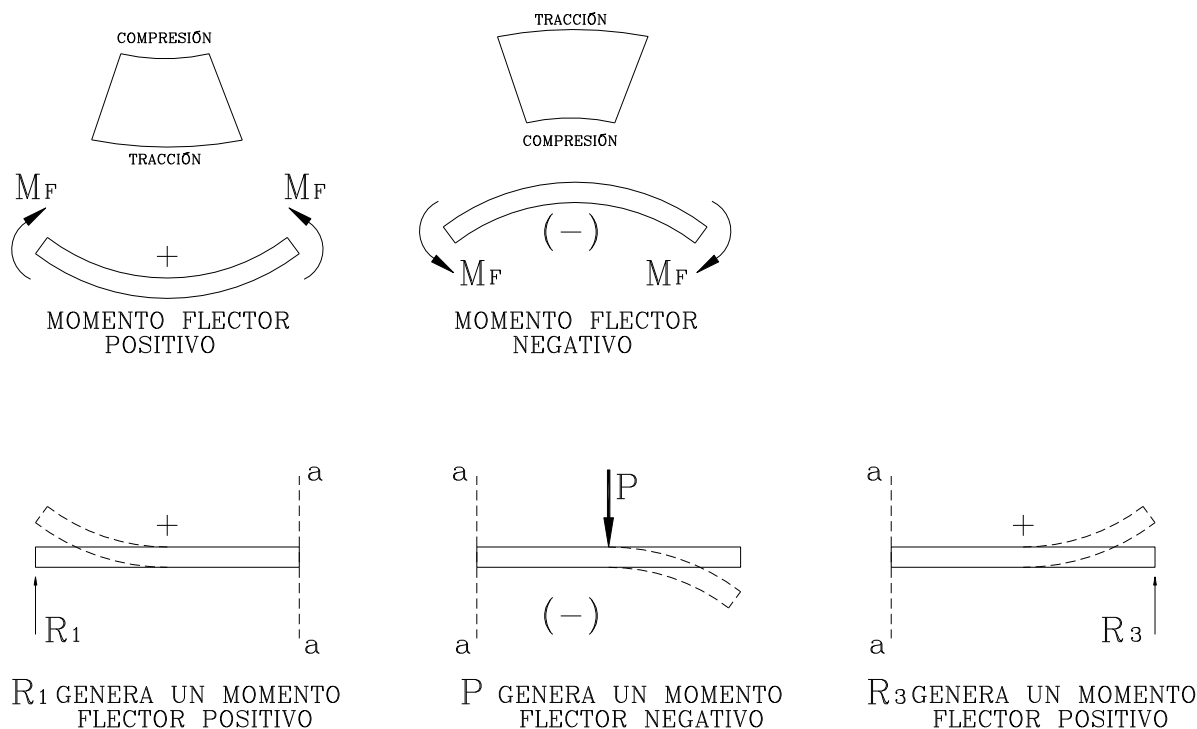


**1.2.2- Momento Flector:** el equilibrio rotacional de los segmentos de viga estudiados se logra con la aparición del Momento Flector  $M_{a-a}$ , señalado en el diagrama de cuerpo

libre anterior. De esta manera este se puede definir **como la sumatoria de los momentos de las fuerzas externas situadas a la izquierda o a la derecha de la sección estudiada**, considerando que el plano de aplicación de las fuerzas es XY (hoja de papel), y la dirección del momento flector es perpendicular a este, es decir el eje particular Z:

$$M_{a-a} = \sum M_i^{izq}_{a-a} = \sum M_i^{der}_{a-a}$$

En cuanto al signo del momento flector, es importante resaltar que este no depende de su sentido de rotación, tal como sucede con el momento de equilibrio, sino más bien de la curvatura que sufre la viga por la aplicación del mismo. De tal manera que una curvatura cóncava hacia arriba se considera positiva, lo contrario es negativo. En la siguiente figura se ilustra esta convención.



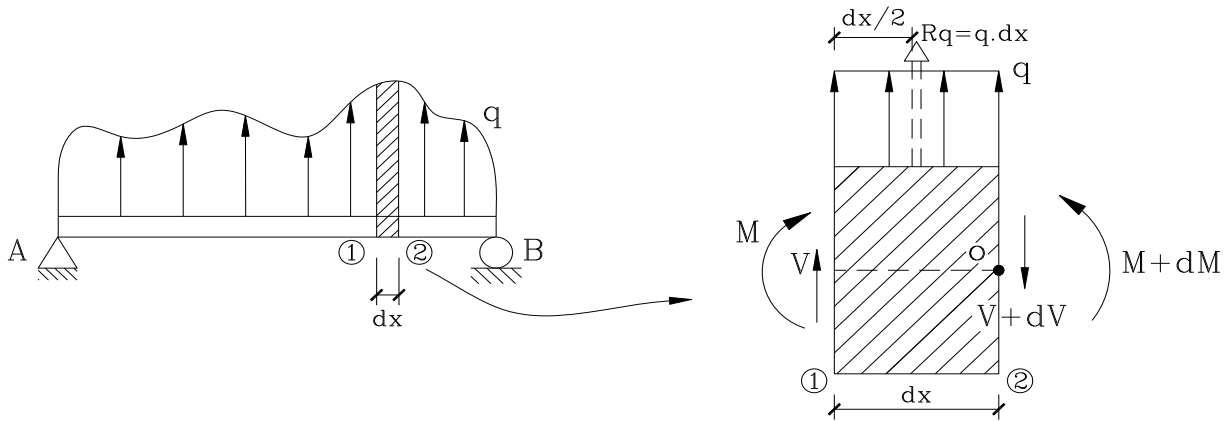
Los momentos flectores positivos generan tracción o alargamiento en las fibras inferiores de la viga y compresión o acortamiento en las superiores, los negativos

producen lo contrario, como se muestra en la parte superior de la figura anterior. En los gráficos inferiores, de la figura anterior, se muestra el efecto de fuerzas individuales y el sentido de curvatura de la viga, considerando un empotramiento imaginario en la sección a-a.

### **1.3- RELACIÓN ENTRE CARGA, CORTE Y MOMENTO FLECTOR.**

Resulta particularmente importante, conocer no solo el valor del corte y del momento flexionante en un punto de la viga, sino mas bien a lo largo de todo el elemento, debido a que en su diseño, se debe considerar la condición más desfavorable de esfuerzo resistente en el interior del sólido, por lograr esto se construyen los llamados diagramas de fuerza cortante y momento flector. La realización de estos diagramas requiere conocer la relación existente entre las cargas externas y las fuerzas internas de corte y momento flector.

En el siguiente gráfico, se ha considerado una viga simplemente apoyada, con un sistema de cargas distribuida general “ $q$ ”, de signo positivo, por tener sentido vertical hacia arriba. 1 y 2 representan dos secciones de la viga separadas una distancia  $dx$ . A la derecha se ha graficado en forma ampliada, el diagrama de cuerpo libre del elemento diferencial de viga contenido entre las secciones 01 y 02, que incluye tanto las fuerzas externas “ $q$ ”, como las fuerzas internas  $V$  y  $M$ , las cuales se supusieron con signo positivo. Para la cara de la sección 01, los valores de fuerzas cortantes y momentos flexionantes son respectivamente  $V$  y  $M$ , mientras que para la sección 02, son los valores de la sección 01 más un cierto diferencial  $dV$  y  $dM$  respectivamente.



Equilibrando el elemento diferencial tenemos:

1.3.1. **Relación Carga – Corte:** por sumatoria de fuerzas verticales,

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow dV = q \cdot dx$$

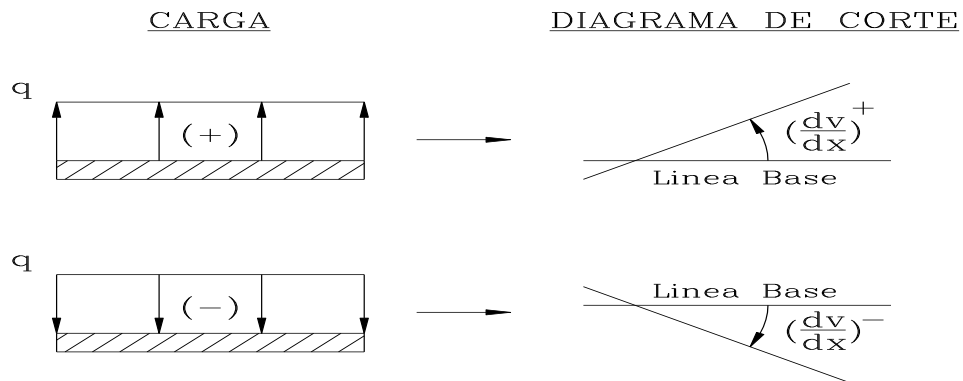
$$\text{Integrando } \int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{X_1}^{X_2} q \cdot dx$$

$$V_2 - V_1 = \Delta V = (\text{Área})_{\text{Carga}}^{1-2}$$

De esta manera se encuentran las siguientes relaciones:

1-  $q = \frac{dV}{dx} \Rightarrow q$ : intensidad de carga;  $\frac{dV}{dx}$ : Pendiente diagrama de corte

1.a - El signo de la carga, define la inclinación de la pendiente del diagrama de corte.



1.b - La intensidad de la carga “q” define la variación de la pendiente del diagrama de corte.

Diagrama de Carga

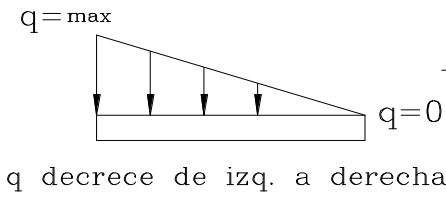
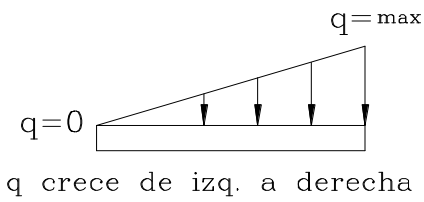
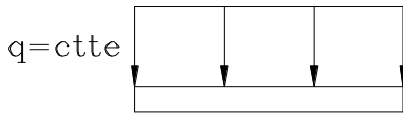
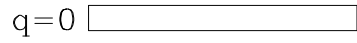
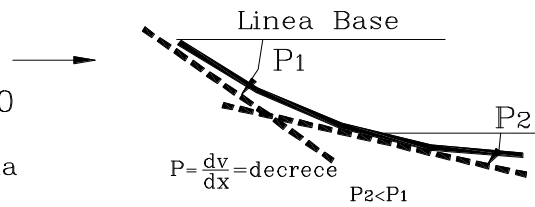
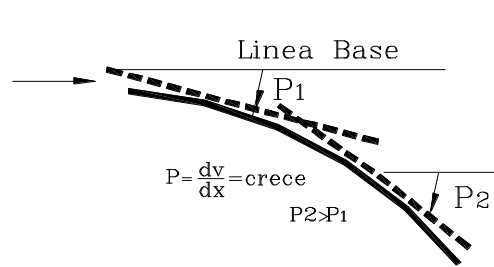
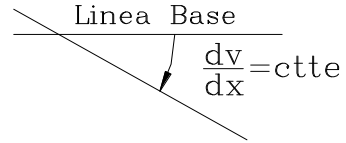
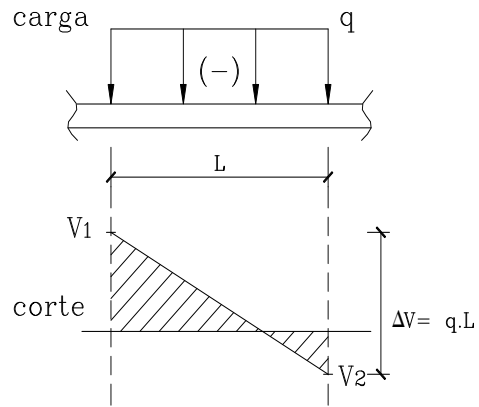


Diagrama de Corte



2- Se puede calcular el corte en la sección 02, con el corte anterior en la sección 01, más el área del diagrama de carga existente entre las secciones 01 y 02:

$$V_2 = V_1 + (\text{Área})_{\text{carga}}^{1-2}$$



**1.3.2. Relación Corte – Momento:** por sumatoria de momentos en el punto “0”:

$$\sum MB = 0 \Rightarrow dM = V \cdot dx$$

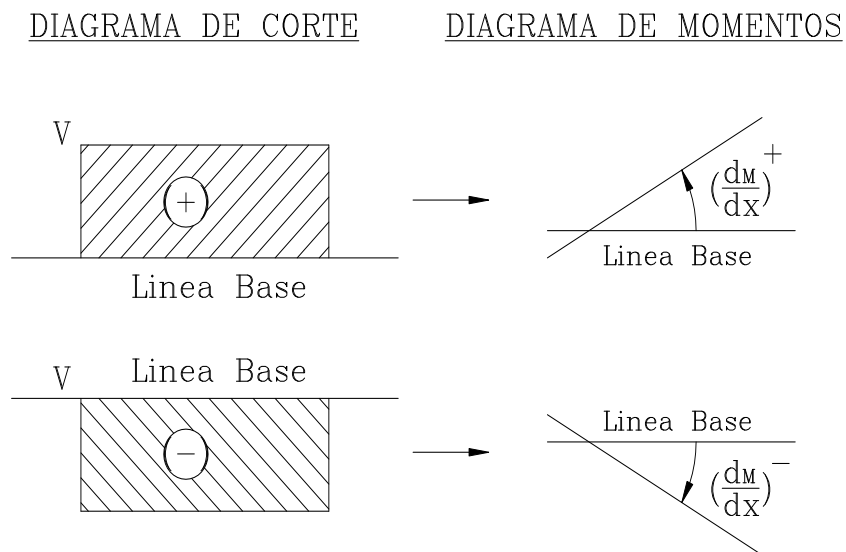
$$\text{Integrando: } \int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} V \cdot dx$$

$$M_2 - M_1 = \Delta M = (\text{Área})_{\text{corte}}^{1-2}$$

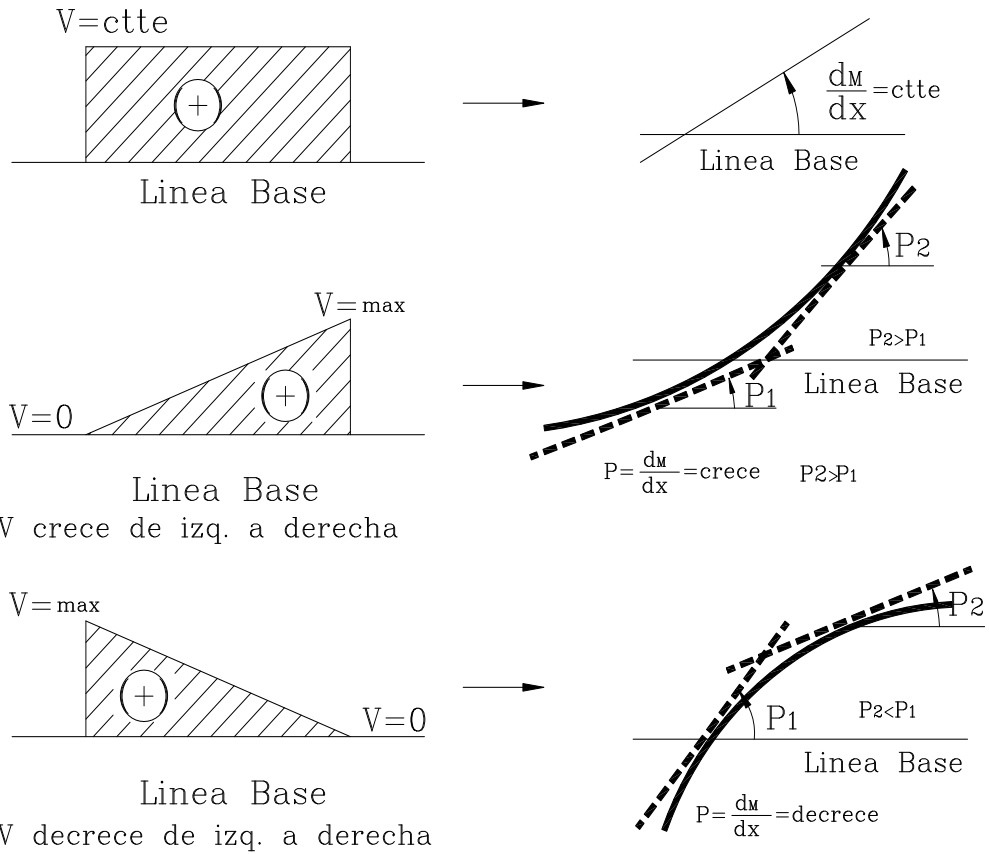
Las relaciones entre corte y momento son:

$$3- V = \frac{dM}{dx} \Rightarrow V: \text{intensidad del diag. de Corte; } \frac{dM}{dx}: \text{Pendiente diag. de Momentos}$$

3.a. El signo del diagrama de corte, define la inclinación de la pendiente del diagrama de Momentos:

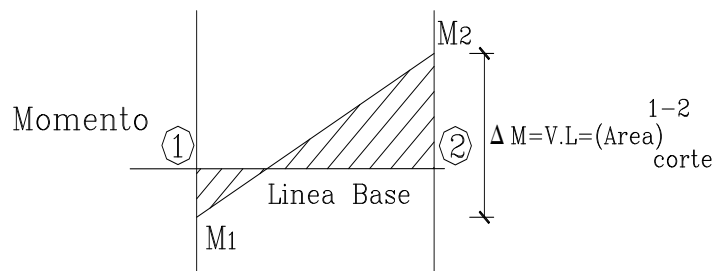
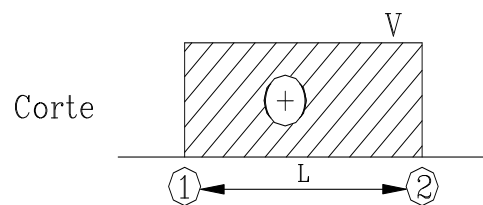


3.b. La Intensidad del diagrama de corte, define la variación de la pendiente del diagrama de Momentos, como se muestra a continuación:



4- Se puede calcular el momento en la sección 02, con el momento anterior en la sección 01, más el área del diagrama de corte existente entre las sección 01 y 02:

$$M_2 = M_1 + (\text{Área})^{1-2}_{\text{Corte}}$$



## TENSIÓN EN VIGAS:

Una vez conocidas las fuerzas generadas en el interior de la viga, es posible estudiar los esfuerzos que ellas producen. Se consideraran los esfuerzos normales producidos en la cara de la sección y los esfuerzos cortantes, paralelos a dichas caras. Para el primer estudio consideraremos que la viga esta sometida a esfuerzo de flexión pura, es decir solo se consideran aquellas porciones de viga donde la fuerza cortante es cero, para el segundo estudio se trataran vigas sometidas a flexión no uniforme, es decir en presencia de fuerzas cortantes. Para ambos casos se harán las siguientes suposiciones:

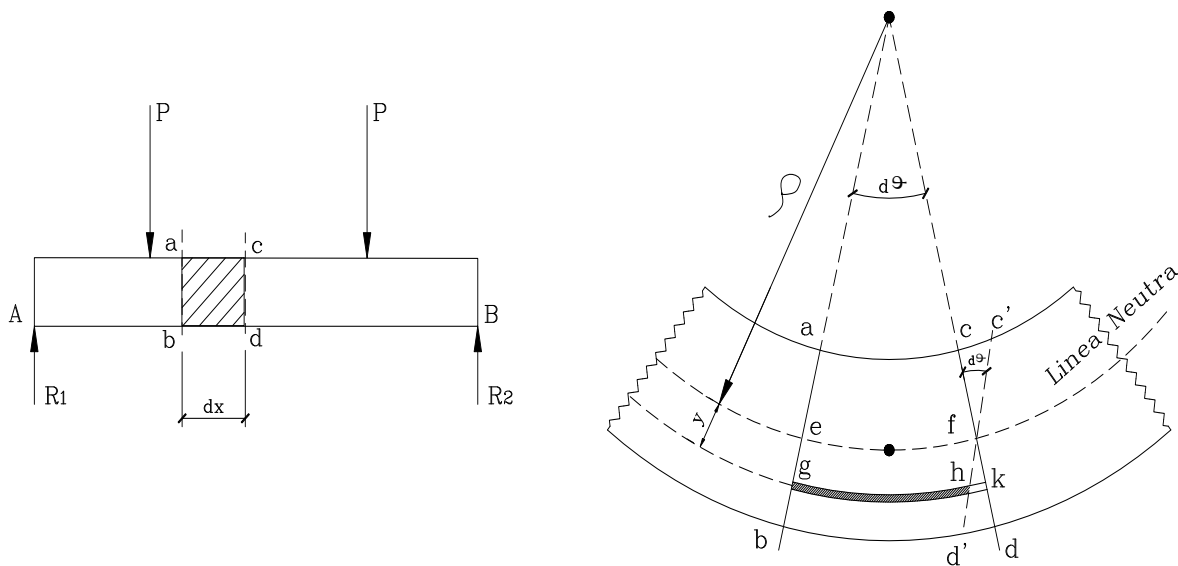
- 1- Las secciones transversales serán planas antes y después de la aplicación de las fuerzas externas.
- 2- El material es homogéneo y cumple con la ley de Hooke.
3. El módulo de elasticidad “E”, es igual a tracción que a compresión.
- 4- La viga será recta y su sección constante en toda su extensión.
- 5- Las cargas externas actúan en el plano que contiene la viga, según los ejes principales de la sección, y serán perpendiculares al eje longitudinal.
- 6- Las deformaciones se consideran pequeñas.

### 2.1- Deformaciones.

Consideremos una viga simplemente apoyada en 1 y 2, como se muestra en la siguiente figura, sometida a un sistema de cargas, que generan en el tramo central, fuerza cortante cero, de tal manera que solo actúa el momento flector en el elemento “abcd” estudiado en el gráfico de deformaciones de la Fig. 2.1.a.



Fig. 2.1.a



De la observación del gráfico de deformaciones, se desprende lo siguiente:

- Las fibras "bd" se alargan (tracción).
- Las fibras "ac" se acortan (compresión).
- Entre las dos anteriores existe la fibra "ef" que no cambia su longitud, debido a que no tiene tensión. Las fibra "ef" tiene la misma longitud original "dx", debido a que está situadas en lo que se llama línea neutra.

Si ahora trazamos la línea "c'd'" por "f" paralela a "ab", se aprecia que "ac" se acorta en "cc'" mientras que "bd" se alarga en "dd'".

Si consideremos ahora la fibra genérica "gh" situada a la distancia "y" de la línea neutra, podemos apreciar como se alarga la distancia "hk":  $\delta_{gh} = hk = y \cdot d\theta$

La deformación unitaria será entonces:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{y \cdot d\theta}{ef} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho \cdot dx} \Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

Si se aplica Ley de Hooke:

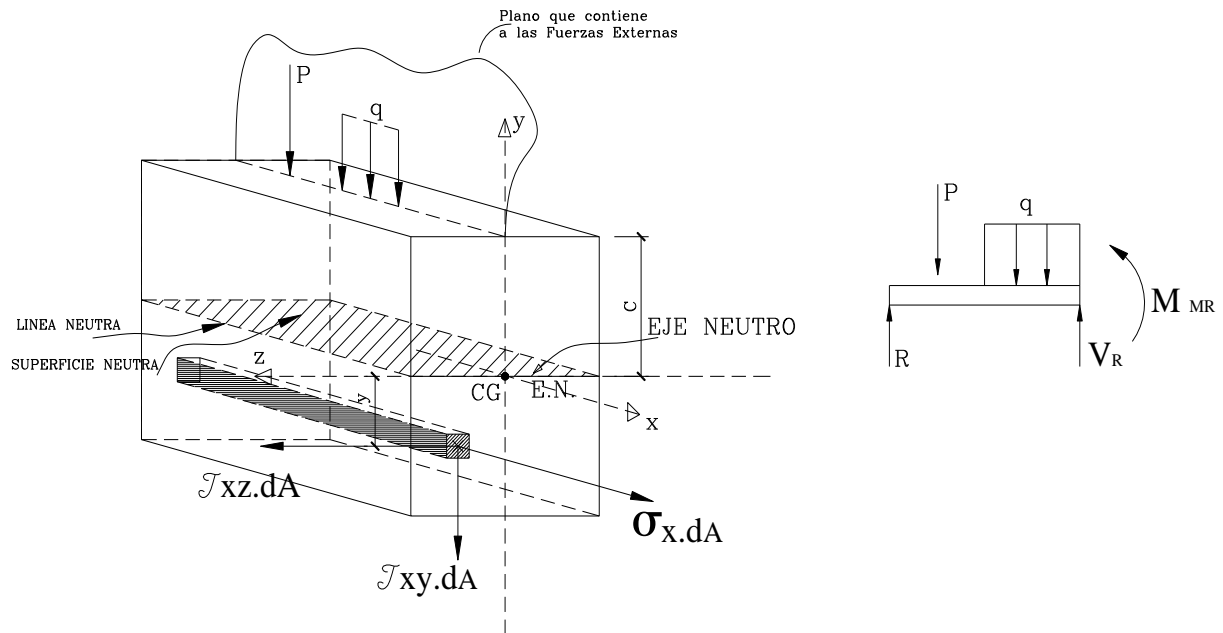
$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E}{\rho} \cdot y \quad \text{ec. 2.1.a}$$

Esta es la fórmula del esfuerzo normal por flexión " $\sigma$ ", en función del radio de curvatura " $\rho$ " y de la distancia a la fibra estudiada "y", medida desde la línea neutra.

## 2.2- Relación entre las Fuerzas Externas y las Tensiones, fórmula de flexión:

En el gráfico siguiente se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento de la fig. 2.1.a., en el espacio. Se aprecian la superficie, línea y eje neutro, cuyas fibras no están sometidas a esfuerzos. Obsérvese que las cargas externas  $P$  y  $q$ , están contenidas en el plano del eje principal que pasa por  $Y$ , y son perpendiculares al eje  $X$ , por lo cual no hay componentes de estas en  $X$  y  $Z$ .

Ahora definimos la fibra rayada situada a una distancia "y" del eje neutro, cuya sección transversal es  $d_A$ , la cual esta sometida a las fuerzas normal  $\sigma_x \cdot d_A$ , y a las fuerzas cortantes  $\tau_{xy} \cdot d_A$  y  $\tau_{xz} \cdot d_A$ .



Las Fuerzas Externas son equilibradas por las Fuerzas Resistentes Internas, por lo tanto procedemos a plantear las respectivas ecuaciones de equilibrio:

$$1- \Sigma F_X = 0 \quad \int \sigma_x \cdot d_A = 0$$

Las Fuerzas Externas no tienen componentes en la dirección  $X$ , sustituyendo  $\sigma_x$  por la ecuación ec.2.1.a encontrada anteriormente:

$$E/\rho \cdot \int y \cdot d_A = 0; \quad E/\rho \text{ es una constante} \Rightarrow \int y \cdot d_A = A \cdot \bar{y} \text{ es el momento estático del área de la sección.}$$

$(E/\rho) \cdot A \cdot \bar{y} = 0$ ; para que esta expresión sea cero,  $\bar{y} = 0$ , lo que indica que **la línea neutra pasa por el centróide de la sección.**

2-  $\Sigma F_y = 0$ ;  $\int \tau_{xy} \cdot d_A = V_R$ , esto representa la fuerza Cortante resistente en la sección:  $V_R$ .

3-  $\Sigma F_z = 0$ ;  $\int \tau_{xz} \cdot d_A = 0$ , las fuerzas externas no tienen componente en Z y como además están aplicadas en el eje que contiene al centróide no generan momentos de torsión alrededor del eje X, por lo tanto para las condiciones supuestas:  $\tau_{xz} = 0$

4-  $\Sigma M_x = 0$ ;  $\int y \cdot (\tau_{xz} \cdot d_A) - \int z (\tau_{xy} \cdot d_A) = 0$ ; se anulan las caras opuestas de la sección.

5-  $\Sigma M_y = 0$ ;  $\int z \cdot (\sigma_x \cdot d_A) = 0 \Rightarrow$  Sustituyendo de nuevo la expresión ec. 2.1.a queda:  
 $E/\rho \int z \cdot y \cdot d_A$ , este integral representa el producto de inercia respecto a dos ejes de simetría, por lo que vale cero.

6-  $\Sigma M_z = 0$

El equilibrio de fuerzas alrededor del eje Z, si tiene fuerzas externas actuantes, representadas por el momento flector "M". Este momento tiene su contraparte interno que es el momento resistente "Mr".

$$M = Mr = \int y (\sigma_x \cdot d_A); \text{ sustituyendo por la expresión ec. 2.1.a.:$$

$$M = (E/\rho) \cdot \int y^2 \cdot d_A$$

En esta expresión el integral representa al momento de Inercia o de segundo orden de la sección, con respecto al eje neutro, por lo que la expresión se puede escribir así:

$$M = (E/\rho) \cdot I \text{ . Utilizando de nuevo la expresión ec. 2.1.a.: } E/\rho = M/I = \sigma/y$$

Finalmente la fórmula del esfuerzo normal por flexión es:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

Donde:

$\sigma$ : es el esfuerzo normal por flexión en una fibra situada a la distancia "y" del eje neutro.

M: es el momento flector generado por las fuerzas externas, en la sección estudiada.

y: representa la distancia a la que se encuentra la fibra estudiada del eje neutro.

I: momento de inercia centroidal, calculado con respecto al eje neutro.

Esta expresión escrita de la siguiente manera:  $\sigma = (M / I) \cdot y$ , nos permite apreciar que el primer término es constante, mientras que “y” es la variable, por lo tanto la ecuación anterior es una línea recta. La variación del esfuerzo normal por flexión a lo largo de una sección de viga es una línea recta. Para valores de  $y = 0$ , el esfuerzo “ $\sigma$ ” es cero (en el eje neutro), por el contrario para valores de “y” equivalentes a la mitad de la altura de la sección los valores de “ $\sigma$ ” serán máximos (en los extremos superior e inferior). Si se considera que “c” es la mitad de la altura de la sección es decir  $h/2$ , entonces:

$$\text{Si, } y = c = h/2 \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M \cdot c}{I}$$

Para efectos de diseño de vigas, resulta muy útil definir el término Módulo Resistente de la sección “Z”, cuya expresión es:

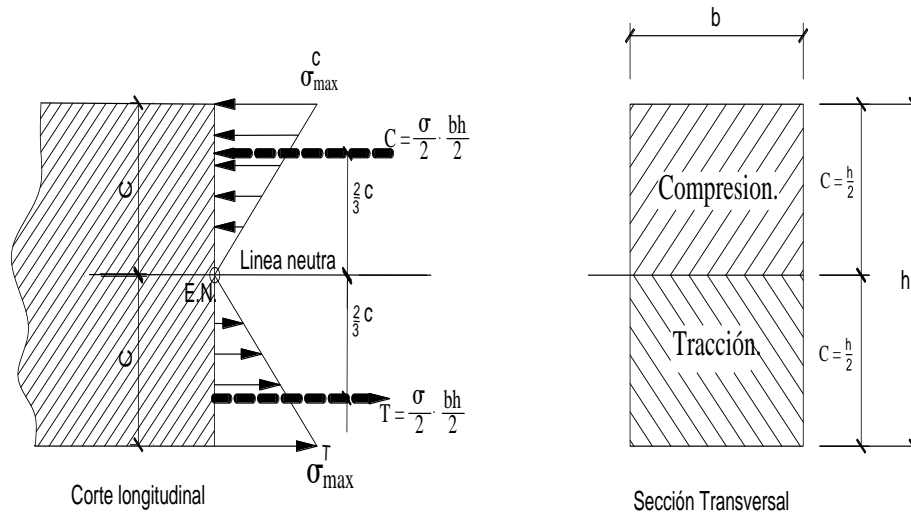
$$Z = I / c$$

Este valor se encuentra tabulado en los catálogos de vigas comerciales, que se encuentran en los anexos de este trabajo.

El esfuerzo normal máximo en función del módulo resistente será entonces:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{Z}$$

Para una Sección Rectangular el gráfico de esfuerzo normal será:



Las fuerzas “C” y “T”, son las resultantes de compresión y tracción de los prismas triangulares generados por los esfuerzos normales respectivos. El momento resistente  $M_R$  es producido por el par de fuerzas C y T.

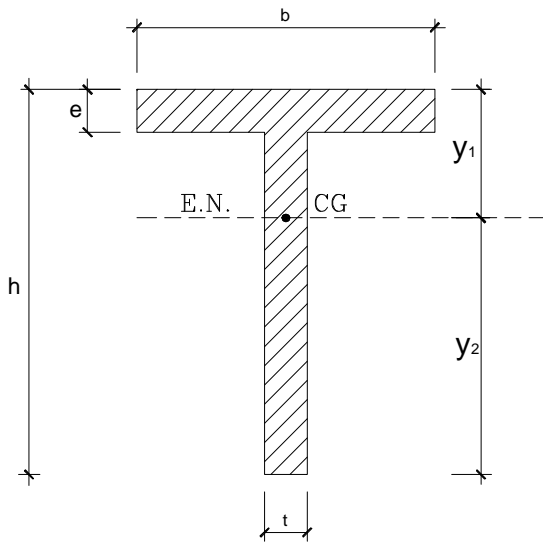
$$M_R = \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h = \sigma \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} \Rightarrow \boxed{M_R = \sigma \cdot Z}$$

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{\frac{B \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{b \cdot h^2}{6}}$$

### 2.3- VIGAS ASIMÉTRICAS:

Para la viga de sección “T” mostrada mas adelante, si los esfuerzos admisibles del material son iguales a tracción que a compresión, simplemente se calculan los esfuerzos normales máximos en las fibras superiores e inferiores de la sección con las respectivas distancias “ $y_1$ ” y “ $y_2$ ” .

En los casos de materiales que tienen diferente capacidad admisible a compresión que a tracción, como el caso del concreto armado, puede ser necesario encontrar alguna dimensión de la sección, para hacer que se alcance las resistencias admisibles simultáneamente a tracción y compresión, de tal manera que:



$$\sigma_{ADM}^T \neq \sigma_{ADM}^C$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$\sigma_{ADM}^C = \frac{M \cdot y_1}{I} ;$$

①

$$\sigma_{ADM}^T = \frac{M \cdot y_2}{I}$$

②

$$\frac{\sigma_{ADM}^C}{\sigma_{ADM}^T} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$y_1 + y_2 = h$$

Para calcular alguna de las dimensiones b, t, ò e:

Se igualan los Momentos Estáticos respecto a un eje común:

$$A \cdot \bar{Y} = \sum A_i \cdot \bar{y}_i$$

$$[(h - e) t + e \cdot b] y_2 = e \cdot b \frac{(h - e)}{2} + (h - e) \cdot t = \frac{(h - e)}{2}$$

## ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS

Consideremos a continuación la viga simplemente apoyada de la fig. 2.4.a, la misma presenta una carga puntual “P” aplicada perpendicularmente al eje de la viga. La sección transversal de la viga esta compuesta por cuatro placas, inicialmente independientes entre si. Para el momento de aplicación de la carga “P”, la deformación por flexión que aparece en la viga, hace que las placas deslicen horizontalmente unas sobre otras.

Si ahora asumimos que las placas tienen algún pegamento o soldadura, de tal manera que impida el deslizamiento anterior, instintivamente podemos visualizar la aparición de una fuerza horizontal entre las placas, que las mantendrá unidas entre si. Esta fuerza generada tiene las características de una fuerza cortante por ser tangente o paralela a la superficie de contacto entre las placas.

Considerando la sección con las placas soldadas de la fig. 2.4.b, donde se aprecian los prismas de esfuerzo normal a compresión y tracción, podemos notar como las resultantes C1 y C2 de compresión, tienen diferente magnitud, por lo tanto en el plano “b” se produce una fuerza cortante  $V_b$ , que mantiene en equilibrio las dos placas superiores, de igual manera se cumple en las dos placas inferiores a tracción, por la simetría los cortes  $V_b = V_d$ . Las caras “a” y “e”, por ser libres no pueden generar fuerza cortante, mientras que en el plano “c”, se produce el mayor desequilibrio de fuerzas normales puesto que se suman las dos fuerzas de compresión superior con las dos de tracción inferior, las cuales deben ser equilibradas por la fuerza cortante  $V_c$ .

Este ejemplo permite de antemano suponer que a diferencia de los esfuerzos normales, los esfuerzos cortantes presentan sus valores máximos en el eje neutro, mientras que los esfuerzos mínimos están en las fibras superiores e inferiores de la sección estudiada.

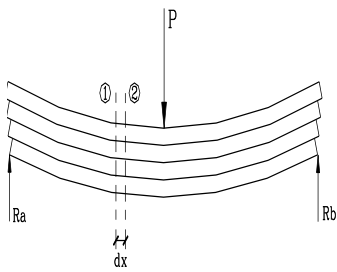


Fig. 2.4.a

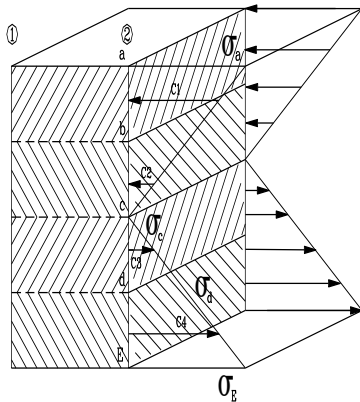
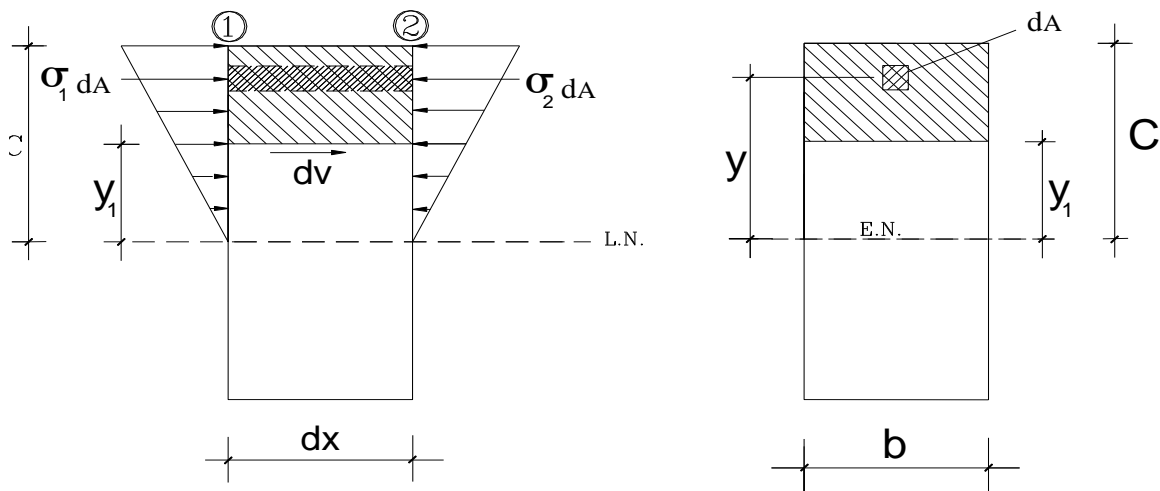


Fig. 2.4.b.

El corte en el plano  $b = d$   
 El corte en el plano  $a$  y  $e = 0$   
 El corte en el plano  $c$  es el máximo  
 $C1 + C2 = C3 + C4$

La parte izquierda de la figura de abajo representa la sección longitudinal del elemento diferencial “dx”, contenido entre las secciones 1 y 2, y los respectivos diagramas de esfuerzo normal en ambas secciones, considerando que estos diagramas difieren en intensidad, debido a la variación de magnitud de momento flector existente entre ambas secciones. En la sección transversal de la derecha, se establece una fibra situada a una distancia variable “y”, medida desde el eje neutro cuya sección transversal es  $dA$ . La distancia “ $y_1$ ” esta situada en el plano de separación entre dos placas, por ejemplo el plano “b”, el área rayada representa la placa superior.



Si consideramos que “dv” es un diferencial de fuerza cortante resistente, que aparece entre las placas soldadas, por lo que matemáticamente se puede expresar como un esfuerzo cortante por un área de aplicación horizontal:



$$dv = \tau \cdot (b \cdot dx) \Rightarrow \tau = dv / (b \cdot dx) \text{ (ec. 2.4.a)}$$

La diferencia de fuerzas horizontales generadas por los esfuerzos normales “ $\sigma$ ” ubicados a ambos lados en las secciones 1 y 2 es:

$$dv = \int_{y_1}^c \sigma_2 \cdot d_A - \int_{y_1}^c \sigma_1 \cdot d_A = M_2 / I \int_{y_1}^c y \cdot d_A - M_1 / I \int_{y_1}^c y \cdot d_A = (M_2 - M_1) / I \cdot \int_{y_1}^c y \cdot d_A$$

$(M_2 - M_1) = d_M \Rightarrow$  Incremento diferencial del Momento Flector

Sustituyendo en la ec. 2.4.a.:

$$\tau = \frac{d_M}{I \cdot (b \cdot dx)} \cdot \int_{y_1}^c y \cdot d_A$$

$d_M / dx = V$ ; relación encontrada anteriormente entre corte y momento flector.

$$\int_{y_1}^c y \cdot d_A = M_e; \text{ momento estático o de primer orden.}$$

Finalmente la fórmula de esfuerzo cortante en vigas sustituyendo a “b” por “t” será:

$$\tau = \frac{V \cdot M_e}{I \cdot t}$$

$\tau$ : Esfuerzo cortante en una fibra situada a la altura “ $y_1$ ”, del eje neutro.

$V$ : Fuerza cortante actuante en la sección.

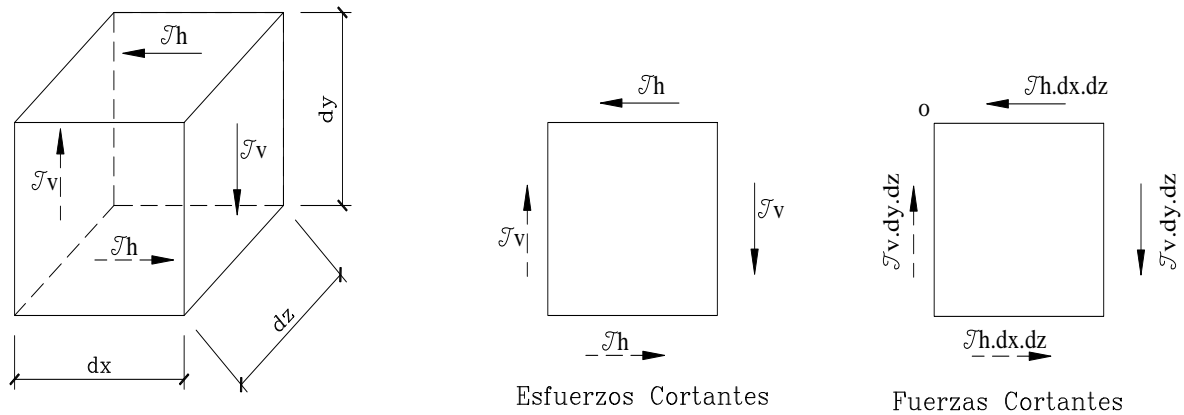
$I$ : Momento de inercia de la sección con respecto al eje neutro.

$t$ : ancho de la zona cortada donde se evalúa el esfuerzo. Para no confundir con el ancho de la viga usaremos la letra “t”,  $b = t$ .

$M_e$ : momento estático del área de sección de viga que genera el esfuerzo cortante a la altura “ $y_1$ ”.

Relación entre el Corte Vertical y el Corte Horizontal.

La fuerza cortante que hasta ahora se estudiado es horizontal, sin embargo la fuerza tomada de los diagramas de corte es vertical. Para relacionar estas fuerzas consideremos el cubo diferencial de la figura siguiente:



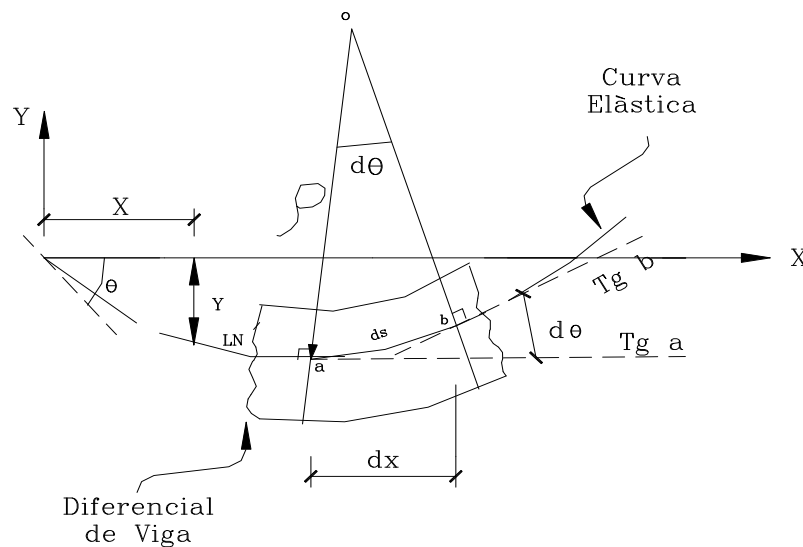
Colocamos los esfuerzos cortantes indicados en las caras verticales y horizontales, como se aprecian en las figuras de la izquierda. Hacemos una sumatoria de momentos producidos por las fuerzas cortantes de la figura a la derecha, respecto del punto “o”, conseguimos:

$$\tau_h \cdot dx \cdot dz \cdot dy = \tau_v \cdot dy \cdot dz \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_h = \tau_v}$$

Los cortes horizontal y vertical son iguales. A este esfuerzo se le llama flujo cortante.

## METODO DE DOBLE INTEGRACIÓN.

Consideremos un elemento diferencial de viga, con una deformación por flexión exagerada, como el que se muestra en la siguiente figura:



$$Tg(\theta) = \frac{dy}{dx}; \quad \text{como la curva es muy suave: } Tg(\theta) \approx \theta$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \text{derivando la expresión anterior: } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{Por otro lado: } ds = \rho \cdot d\theta; \quad \text{pero } ds \approx dx \Rightarrow dx = \rho \cdot d\theta \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Relacionando las dos fórmulas anteriores.

$$\textcircled{1} \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad \text{recordando la fórmula deducida anteriormente: } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} \quad \textcircled{2}$$

Igualando  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$  resulta:

$$E.I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = M_{(x)}$$

Esta expresión se denomina ecuación diferencial de la curva elástica y sus términos son los siguientes:

E.I: Rigidez a Flexión, normalmente constante a lo largo de la viga.

$M_{(x)}$ : ley de momentos flectores, en función de la distancia X.

Para darle una utilidad práctica a esta ecuación, se hacen dos integraciones, considerando que E.I es constante:

1- La primera ecuación permite conocer la pendiente de la elástica en cualquier punto

⇒ Ecuación de la pendiente:  $dy / dx = \theta$

$$EI \frac{dy}{dx} = \int M_{(x)}.dx + C_1$$

2- La segunda integración permite conseguir la deflexión o abcisa de la curva elástica en cualquier punto situado a la distancia “x” del origen de coordenadas “xy”

⇒ Ecuación de la flecha: “y”

$$EI y = \iint M_{(x)}.dx + C_1 \cdot X + C_2$$

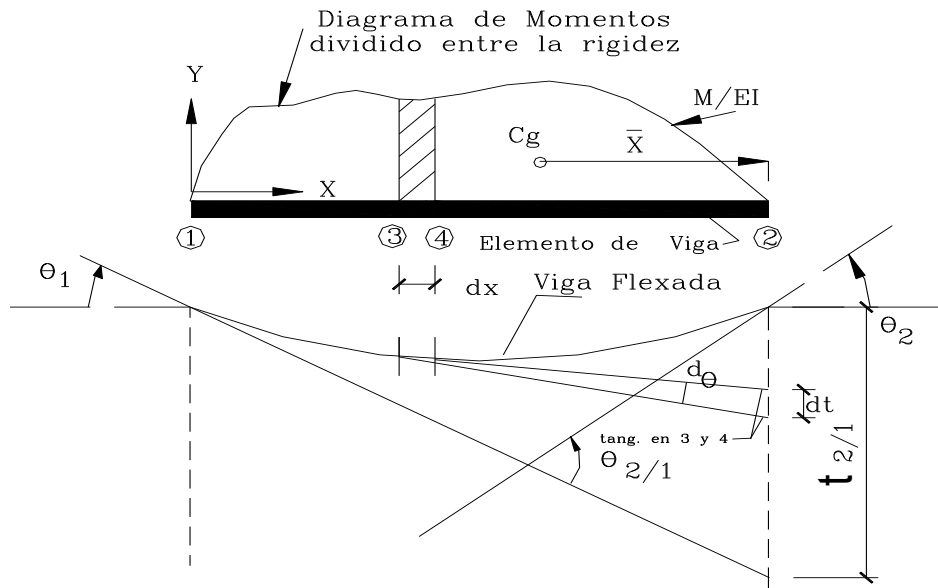
Las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ , se consiguen aplicando una condición de frontera cinemática o condiciones de borde, para lo cual se grafica la curva elástica aproximada de la viga y se observan aquellos puntos donde es conocida bien sea la deflexión o el giro. Estos puntos de valores conocidos son los apoyos, de tal manera que un apoyo fijo o un rodillo, harán que la deflexión en ese punto sea cero ( $y=0$ ), mientras que un empotramiento además de restringir la flecha también impide el giro “ $\theta$ ”, creando así las condiciones de borde:  $y = 0$  y  $\theta = 0$ .

### 3.2- MÉTODO DEL ÁREA DE MOMENTOS.

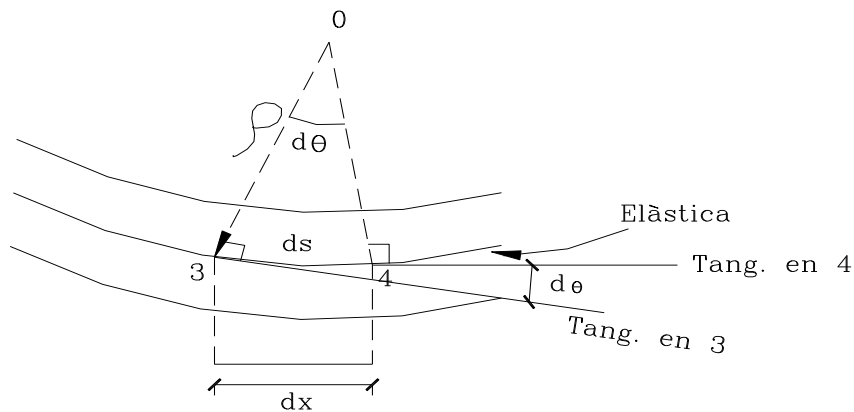
Se basa en relación existente entre el Momento Flexionante y la rotación o giro en cualquier punto de un miembro sometido a Flexión. La siguiente figura muestra una

porción de viga cargada con su diagrama de momentos dividido entre la rigidez E.I. El elemento diferencial de viga se encuentra entre los puntos 3 y 4.

Ecuación de Flexión:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I}$



En el siguiente gráfico se amplia el elemento diferencial y se observan las tangentes a la elástica trazadas en 3 y 4, las cuales son perpendiculares a los radios de curvatura "ρ" respectivos:



se puede entonces escribir:  $ds = \rho \cdot d\theta$

Entonces junto con la ecuación de flexión anterior:  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} = \frac{d\theta}{ds}$

ò también  $d\theta = \frac{M}{EI} ds$ ; pero como la curvatura es suave:  $ds \approx dx$

Entonces:

$$\textcircled{1} \quad \boxed{d\theta = \frac{M}{EI} dx}$$

Entre 1 y 2 el incremento de la pendiente será:

$$\theta_{1,2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M \cdot dx ; \quad \boxed{\theta_{1,2} = \frac{1}{EI} \int_{x_1}^{x_2} M \cdot dx}$$

Por otro lado del primer gráfico  $\Rightarrow d_t = X \cdot d\theta$ ; y por incrementos sucesivos de “ $d_t$ ”:

$$t_{2/1} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d_t = \int_{\theta_1}^{\theta_2} X \cdot d\theta, \text{ sustituyendo por } \textcircled{1}:$$

$$\boxed{t_{2/1} = \frac{1}{EI} \cdot \int_{x_1}^{x_2} X \cdot M dx}$$

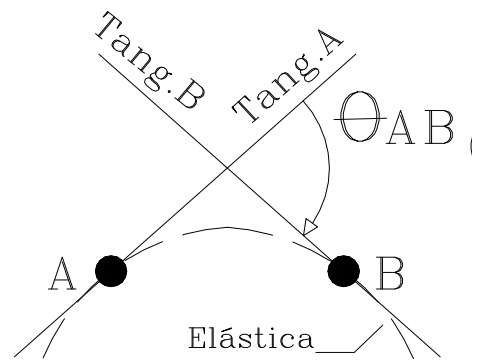
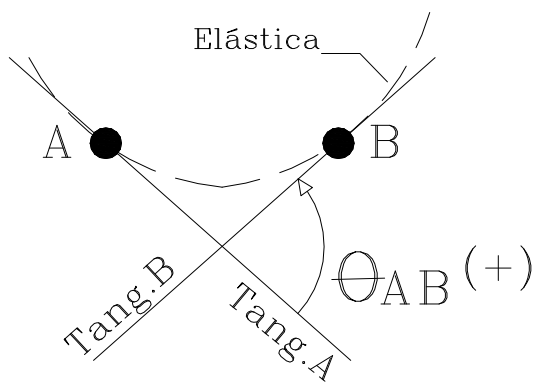
Para “ $x_1$ ”, el Integral es cero, por lo tanto si  $M dx = d_A$  y “ $X$ ” representa la distancia a el punto 2, la expresión integral representa el momento de primer orden del área del diagrama de momentos respecto del punto 2.

A continuación se enuncian los dos teoremas del método, el primero de los cuales sirven para calcular el ángulo de desviación entre dos puntos, y el segundo calcula la desviación lineal vertical entre los mismos.

**Teorema 1:** La variación de la pendiente entre las tangentes trazadas a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B es igual al producto de  $1/EI$  por el área del diagrama de Momentos Flectores entre estos dos puntos.

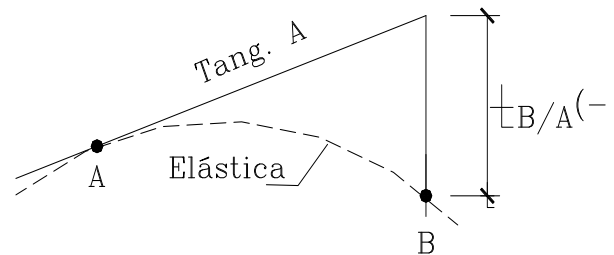
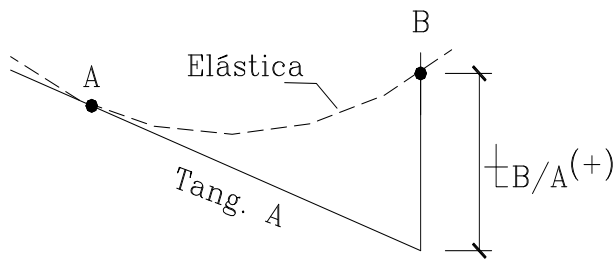
$$\boxed{\theta_{AB} = \frac{1}{EI} \cdot (\text{Área})_{AB}}$$

A continuación se muestra la convención de signos.



**Teorema 2:** La desviación de un punto B, respecto de la tangente trazada a la elástica en otro punto cualquiera A, en dirección perpendicular a la viga inicial, es igual al producto  $1/EI$  por el Momento respecto de B del área de la porción del diagrama de Momentos entre A y B. En anexo A se presentan unas tablas con las áreas de diferentes diagramas de momento y la distancia centroidal X.

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI} (\text{Area})_{AB} \cdot \bar{X}_B$$



## MÉTODO DE SUPERPOSICION O SOBREPOSICION.

Este es un método práctico que se utiliza para conseguir deflexiones, ángulos de giro y hasta fuerzas internas. Se fundamenta en el hecho de encontrar las deformaciones producidas por diferentes cargas aplicadas simultáneamente sobre la viga, sumando el efecto que de manera independiente produciría cada una de ellas. Para ello se utilizan las tablas del anexo B, en ellas se consideran vigas elementales de un solo tramo sometidas a diferentes tipos de cargas y de apoyos. Por otros métodos se calculó las flechas, giros, momentos y cortes en puntos relevantes, e inclusive se da la ecuación de la curva elástica.

Este método es parte de un concepto más general utilizado en mecánica de sólidos llamado **Principio de Superposición**. Este principio es válido cuando la cantidad que se desea calcular es función lineal de las cargas aplicadas. En el caso de las vigas, la naturaleza de la ecuación diferencial de la curva elástica y sus respectivas integraciones para calcular deformaciones, son ecuaciones lineales por que todos los términos que contienen las deformaciones ( $y$ ,  $\theta$ ) están elevados a la primera potencia; por lo tanto la solución de estas ecuaciones, para varias condiciones de carga, puede resolverse sumando algebraicamente cada una por separado.

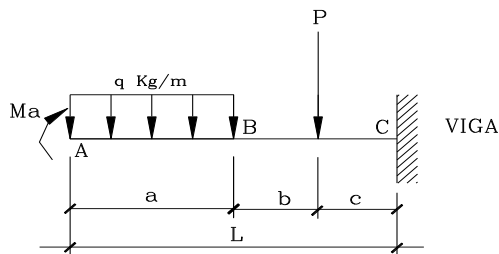
En vigas este principio es valido si se cumple lo siguiente:

- 1- Se aplica en materiales linealmente elásticos es decir vale la ley de Hooke.
- 2- Las deformaciones son pequeñas.
- 3- La presencia de deformaciones no altera la acción de las cargas aplicadas.

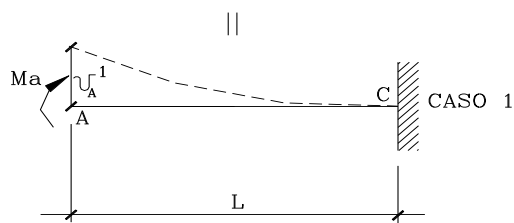
A estos sistemas se les llama Sistemas Estructurales Lineales, por que la ecuación diferencial de la curva de deflexiones es lineal. Las tablas empleadas estas divididas en dos grandes grupos, vigas de un tramo simplemente apoyadas y en cantiliver. Para la solución de problemas prácticos, se debe manipular estas vigas elementales de tal manera que se puedan conseguir todos los tipos de cargas existentes en la viga real, pudiéndose cambiar la orientación de la viga o el sentido de las cargas, siempre y cuando no se altere la esencia física de los resultados buscados.



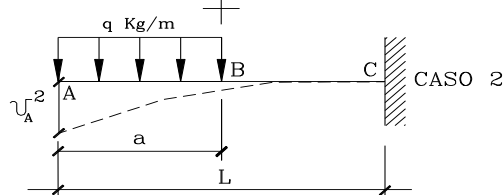
En la viga mostrada a continuación, queremos calcular la flecha o deflexión en el extremo "A", por superposición. La viga original en cantiliver, tiene tres cargas externas. Por lo cual se generan tres casos de carga, los cuales sumados producen el efecto de



la viga original. Para cada caso buscamos en las tablas respectivas la deflexión en el extremo A. Las deflexiones hacia arriba son positivas y hacia abajo negativas.

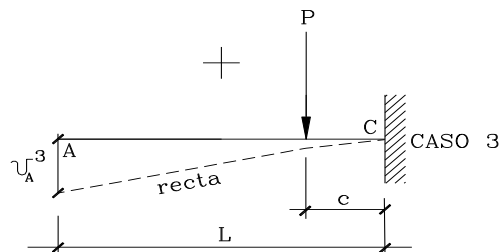


$$u_{A}^1 = \frac{M_B L^2}{2EI}$$



$$u_{A}^2 = -\frac{q \cdot a^3}{24EI} (4L - a)$$

$$u_{A}^3 = -\frac{P \cdot c^2}{6EI} (3L - c)$$



La deflexión total en A es:  $u_A^T = u_{A}^1 + u_{A}^2 + u_{A}^3$

## VIGAS HIPERESTÁTICAS.

Como se describió en el capítulo 1.1.2, las vigas hiperestáticas o estáticamente indeterminadas, son aquellas que tiene al menos un grado de indeterminación, esto equivale a decir que existe como mínimo una reacción sobrante, a estas reacciones se les llama **redundantes estáticas**. Si estas reacciones son suprimidas de la estructura original por algún método de cálculo, a la nueva estructura se le llama **estructura liberada** o también **estructura primaria**.

En el cálculo de este tipo de vigas, las ecuaciones de equilibrio estático no son suficientes para encontrar las reacciones externas, puesto que solo se disponen de tres; las dos sumatorias de fuerzas y la de momentos. Si la viga tiene cargas verticales solamente, la ecuación de sumatoria de fuerzas en X, siempre dará reacciones nulas en ese sentido. Para poder generar un número adicional de ecuaciones que coincida con el grado de indeterminación, se recurre a las ecuaciones de deformación de la viga. A estas ecuaciones se les llama **ecuaciones de deformaciones compatibles**, debido a que las mismas reflejan o son compatibles con las deformaciones que los apoyos de la viga original le permite, según la curva elástica de la viga.

Para solución de este tipo de vigas estudiaremos dos métodos:

### **Método de doble integración.**

Primero se generan las ecuaciones de deformaciones compatibles, tantas como grado de indeterminación tenga la estructura, mediante un procedimiento similar al descrito para calcular las deformaciones en vigas isostáticas.

En este caso las condiciones de borde o de frontera cinemática encontradas, tendrá que ser igual al grado de indeterminación (G.I.) más dos, para poder encontrar los valores de las dos constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ :

$$N^{\circ} \text{ Condiciones de borde} = G.I + 2$$

Con estas ecuaciones generadas por deformaciones, más las ecuaciones de equilibrio respectivas, se tendrá el número suficiente para calcular todas las reacciones externas de la viga. En el ejemplo 8.2.1 del capítulo de problemas, se puede apreciar este procedimiento.

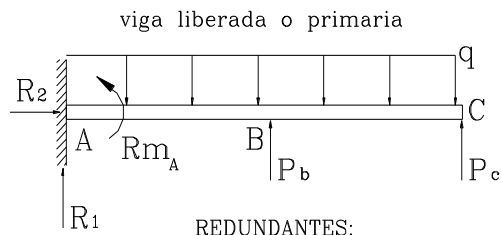
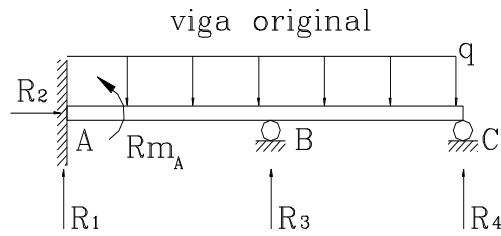
#### **4.2- Método de Superposición.**

A continuación enumeramos los pasos a seguir con este método:

- 1- Seleccionamos tantas reacciones redundantes como grado de indeterminación tenga la viga, tratando siempre que la viga primaria sea estable y presente estados de carga contenidos en las tablas de superposición.
- 2- Asumimos las reacciones anteriores como cargas externas.
- 3- Se plantea un total de casos de carga o sub-problemas equivalente al número de cargas externas más las reacciones escogidas como redundantes.
- 4- Se asocia un caso de deformación, con cada reacción redundante, es así como una reacción tipo “fuerza” se corresponde con una deformación tipo “flecha o deflexión”, mientras que una reacción tipo “momento” se asocia con una deformación tipo “giro”. Estas deformaciones deben ocurrir en el mismo punto de aplicación de las reacciones redundantes.
- 5- Se plantean tantas ecuaciones de deformaciones compatibles como sea el número de reacciones redundantes. Para ello se plantea que las deformaciones asociadas tengan el valor de deformación de la viga original y su curva elástica en los puntos específicos, que suele ser en los apoyos
- 6- Se tendrá un número equivalentes de ecuaciones y de reacciones redundantes. Se resuelve el sistema, dando como resultado los valores de las reacciones redundantes.
- 7- Se encuentran las demás reacciones no redundantes, por las ecuaciones de equilibrio estático.

A continuación se muestra un ejemplo de escogencia de dos tipos diferentes de reacciones redundantes para una misma viga. En el primer caso se resuelve el sistema

por las tablas de vigas en cantiliver, en el segundo por las tablas de vigas simplemente apoyadas.



REDUNDANTES:

$$R_3 = P_b$$

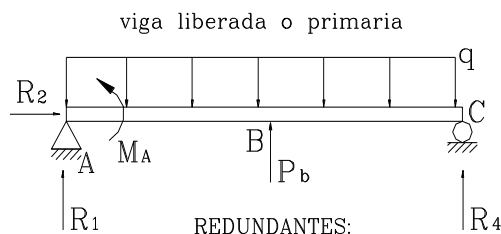
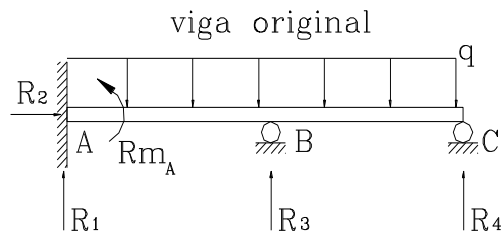
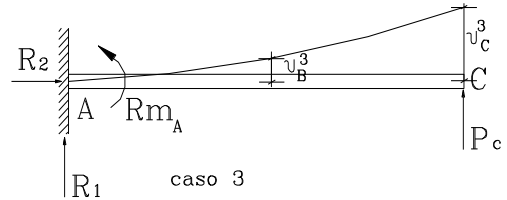
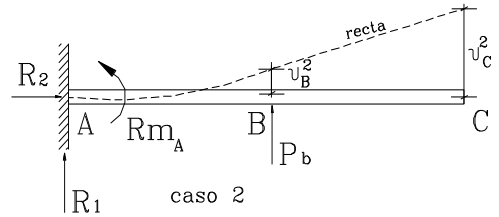
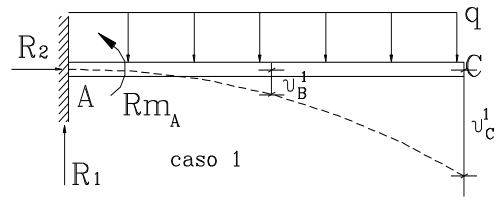
$$R_4 = P_c$$

DEFORMACIONES COMPATIBLES

$$1- v_B^T = -v_B^1 + v_B^2 + v_B^3 = 0$$

$$2- v_C^T = -v_C^1 + v_C^2 + v_C^3 = 0$$

TABLAS DE VIGAS EN CANTILIVER



REDUNDANTES:

$$Rm_A = M_A$$

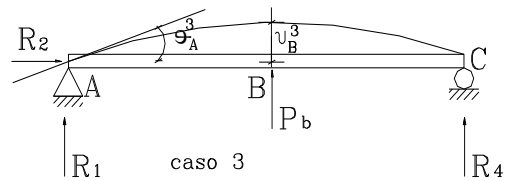
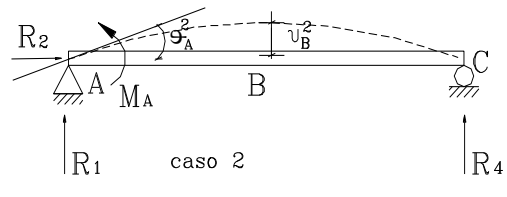
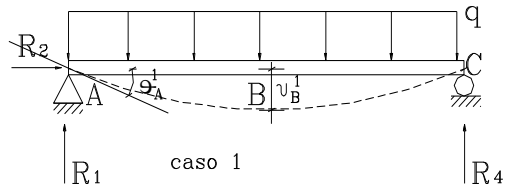
$$R_3 = P_b$$

DEFORMACIONES COMPATIBLES

$$1- \vartheta_A^T = -\vartheta_A^1 + \vartheta_A^2 + \vartheta_A^3 = 0$$

$$2- v_C^T = -v_C^1 + v_C^2 + v_C^3 = 0$$

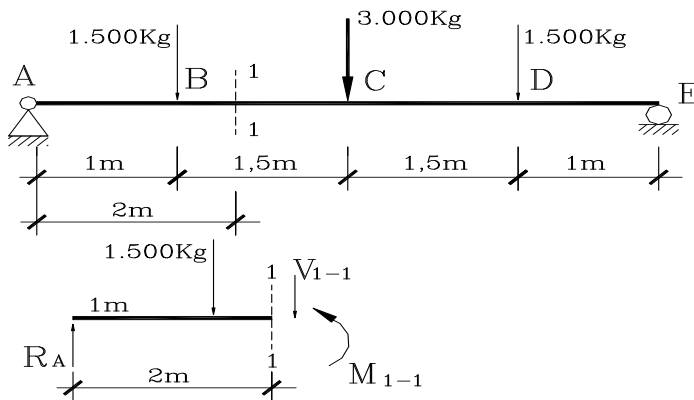
TABLAS DE VIGAS SIMPLEMENTE APOYADAS



## PROBLEMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.

### CÁLCULO DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR.

5.1.1- Calcular la Fuerza Cortante “V” y el Momento Flector “M”, en la sección 1-1, de la Viga simplemente apoyada mostrada.



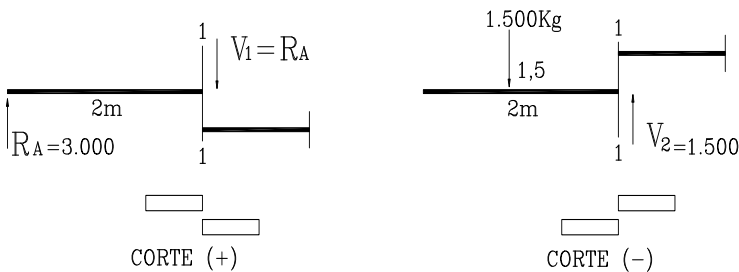
Como la viga es simétrica, podemos calcular las reacciones así:

$$R_A = R_B \quad ; \quad \sum F_y = 2 \cdot R_A \Rightarrow R_A = \frac{\sum F_y}{2}$$

$$R_A = R_B = \frac{6.000 \text{ Kg.}}{2} = 3.000 \text{ Kg.}$$

El Segmento de la viga situado a la izquierda de 1-1, presenta 2 cargas externas:  $R_A$  y 1.500 Kg.

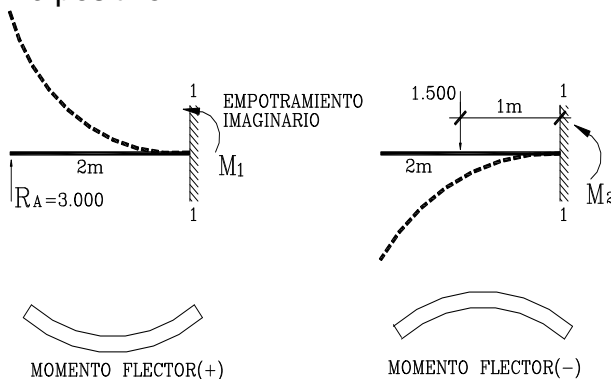
Para calcular la Fuerza Cortante en la sección 1-1, sumamos las fuerzas externas a la izquierda de la sección 1-1. Obsérvese que  $V_{1-1}$  se definió positivo.



$$V_{1-1} = \sum_{1-1}^{Izq} F_i$$

$$V_{1-1} = 3.000 - 1.500 = 1.500 \text{ Kg.}$$

Para calcular el Momento Flector en la sección 1-1, sumamos los Momentos de las fuerzas externas situadas a la izquierda de la sección 1-1. Obsérvese que  $M_{1-1}$  se definió positivo.

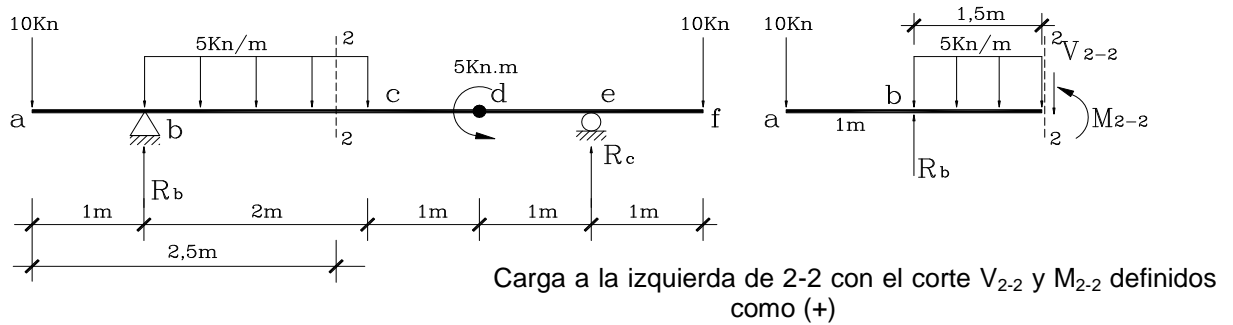


$$M_{1-1} = \sum_{1-1}^{Izq} M_i$$

$$M_{1-1} = 3.000 \times 2 - 1.500 \times 1 \text{ m}$$

$$M_{1-1} = 4.500 \text{ Kg} - \text{m}$$

5.1.2- Para la viga mostrada, calcule el valor de la Fuerza Cortante y del Momento Flector en la sección 2-2.



Cálculo de Reacciones:

$$\sum M_b = 0 \Rightarrow 1 \times 10 - 5 \times 2 \times 1 + 5 + 4 R_c - 5 \times 10 = 0 \Rightarrow R_c = 11,25 \text{ Kn}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -10 + R_b - 5 \times 2 + 11,25 - 10 = 0 \Rightarrow R_b = 18,75 \text{ Kn}$$

La Fuerza Cortante en 2-2 será:  $V_{2-2} = \sum F_c^{lq}{}_{2-2} = -10 + 18,75 - 5 \times 1,5$

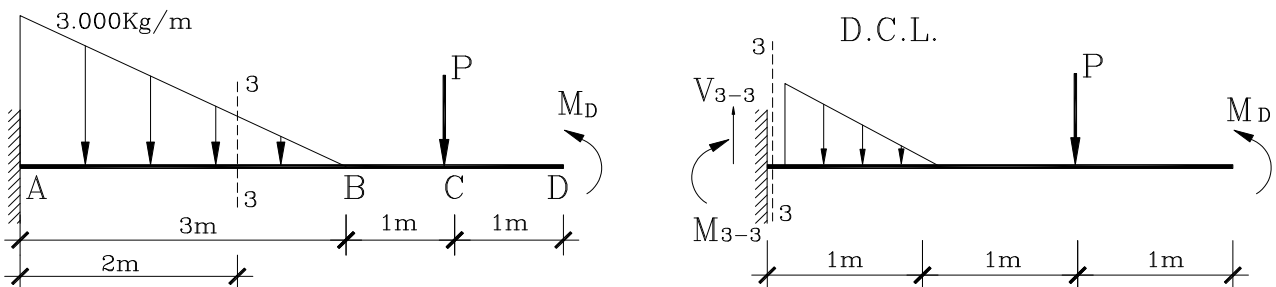
$$V_{2-2} = 1,25 \text{ Kn}$$

El Momento Flector en 2-2 será:

$$M_{2-2} = \sum M_c^{lq}{}_{2-2} = -10 \times 2,5 + 18,75 \times 1,5 - 5 \times 1,5 \times \frac{1,5}{2}$$

$$M_{2-2} = -2,5 \text{ Kn. m}$$

5.1.3- Calcule el valor de la carga "P" y del momento "Md", sabiendo que en la sección 3-3 el corte es de 1.250 Kg. y el Momento Flector es de -666,67 Kg-m



En este caso trabajaremos con la porción de viga situada a la derecha de la sección 3-3, para no tener que calcular las reacciones en "A".  
Obsérvese que se definen  $V_{3-3}$  y  $M_{3-3}$  positivos para el lado derecho.

$$\text{Calculo de } Y_1 = \frac{3.000}{3} = \frac{Y_1}{1} \Rightarrow Y_1 = 1.000 \text{ Kg/m}$$

$$V_{3-3} = \sum_{\text{Der}} F_i^{3-3} = \frac{1.000 \times 1}{2} + P = 1.250 \Rightarrow \boxed{P = 750 \text{ Kg}}$$

Los momentos flectores producidos por la carga triangular y la fuerza "P" son negativos, respecto a 3-3, mientras que  $M_D$  es positivo.

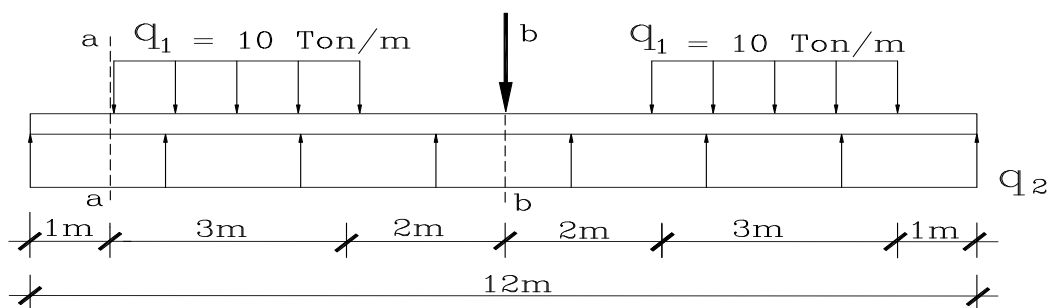
$$M_{3-3} = \sum_{\text{Der}} F_i^{3-3} = \frac{-1.000 \times 1 \times 1}{2} - 2 \times 750 + M_D = -666,67$$

$$\boxed{M_D = 1.000 \text{ Kg - m}}$$

5.1.4- La Viga mostrada representa una losa de fundación de concreto armado, las cargas  $q_1$  y  $p_1$  representan el peso de la edificación mientras que la carga uniforme  $q_2$  representa la reacción del suelo contra la losa, como se muestra en la Figura.

- Determine el valor de  $q_2$  para alcanzar el equilibrio.
- Determine los valores de corte y Momento Flector en las secciones a-a y b-b.

$$P_1 = 24 \text{ Ton}$$

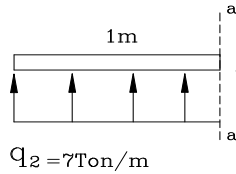


a. Las cargas son simétricas. Para encontrar  $q_2$ , hacemos equilibrio de fuerzas verticales.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 12m \times q_2 - 2 \times 3m \times 10 \text{ ton/m} - 25 \text{ ton} = 0$$

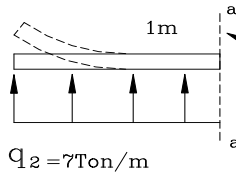
$$\boxed{q_2 = 7 \text{ ton/m}}$$

b. La sección a-a, representa el borde de la edificación.



$$V_{a-a} = \sum_{a-a}^{Izq} F_i = 1\text{m} \times 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \Rightarrow \boxed{V_{a-a} = 7 \text{ ton}}$$

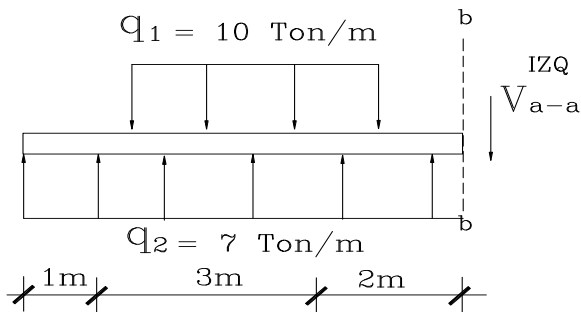
$Q_2 = 7 \text{ Ton/m}$



$$M_{a-a} = \sum_{a-a}^{Izq} M_i = + 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \times 1\text{m} \times \frac{1\text{m}}{2} \Rightarrow \boxed{M_{a-a} = 3,5 \text{ ton.m}}$$

$Q_2 = 7 \text{ Ton/m}$

La sección b-b representa el centro de la losa y el apoyo de una columna



Para calcular el corte se presentan 2 casos:  
- El primero es el corte a la izquierda de la sección b-b, donde la carga  $P_1$  no aparece.

$$V_{a-a}^{Izq} = 6\text{m} \times 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} - 3\text{m} \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}} = 12 \text{ ton}$$

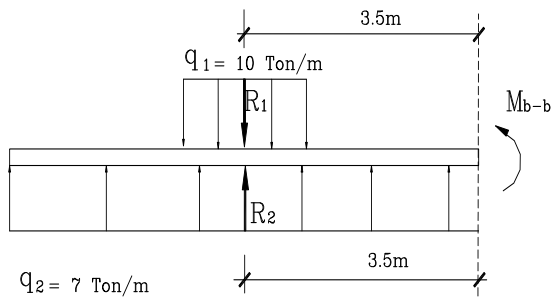
$$\boxed{V_{a-a}^{Izq} = 12 \text{ ton}}$$

- El segundo es el corte a la derecha de la sección b-b, donde si actúa la carga puntual  $P_1$ .

$$V_{a-a}^{Der} = 6\text{m} \times 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} - 3\text{m} \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}} - 24 \text{ ton}$$

$$\boxed{V_{a-a}^{Der} = -12 \text{ ton}}$$

La diferencia del corte entre estos dos puntos se corresponde con el valor de la carga puntual.



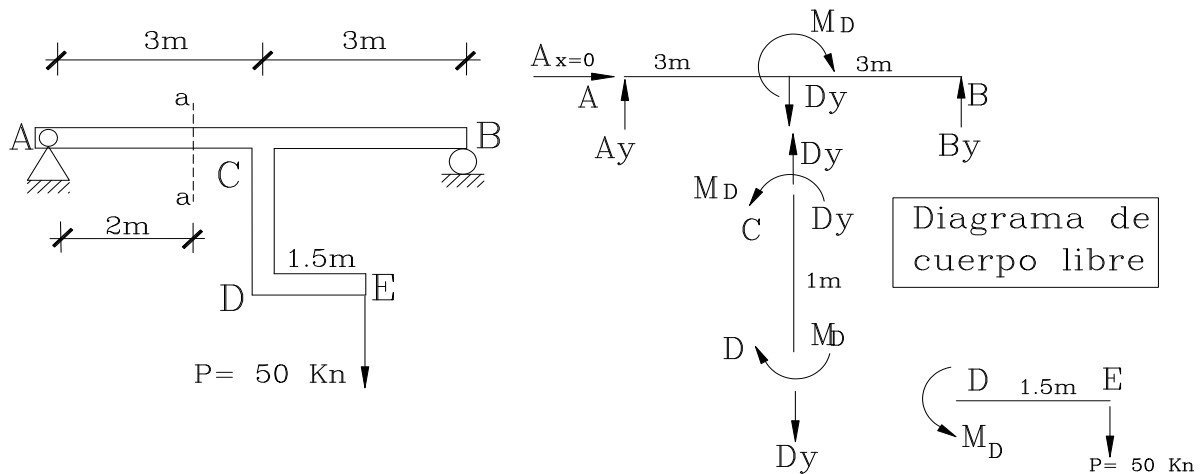
Para calcular el Momento Flector en b-b, estos son iguales tanto a la izquierda, como a la derecha de la sección.

$$M_{b-b} = 6\text{m} \times 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \times 3,5\text{m} - 3\text{m} \times 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \times 3,5\text{m}$$

$$\boxed{M_{b-b} = 42 \text{ ton.m}}$$



5.1.5- La Viga principal AB, soporta un elemento secundario CDE, con una carga puntual en el extremo. Determine el valor del corte y del Momento Flector en a-a para la viga principal.



Por equilibrio determinamos los valores de  $M_D$  y  $D_y$ , sobre la viga principal (ver diagrama de cuerpo libre).

Elemento DE:  $\sum F_y = 0 \uparrow \quad D_y - 50 \text{ Kn} = 0 \quad \Rightarrow D_y = 50 \text{ Kn}$

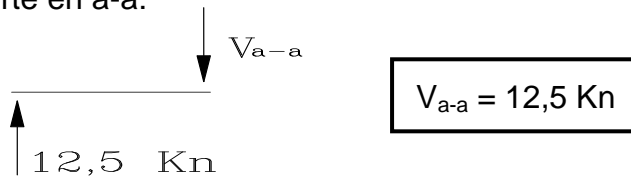
$\sum M_D = 0 \curvearrowright \quad M_D - 50 \text{ Kn} \times 1,5 \text{ m} = 0 \Rightarrow M_D = 75 \text{ Kn} \times \text{m}$

Consideramos ahora la viga principal bajo el efecto de las dos fuerzas calculadas, donde  $D_y$  representa la fuerza cortante para los miembros DE y AB, por tratarse de una carga perpendicular al eje de la viga, mientras que para el miembro CD, representa una fuerza axial de tracción.

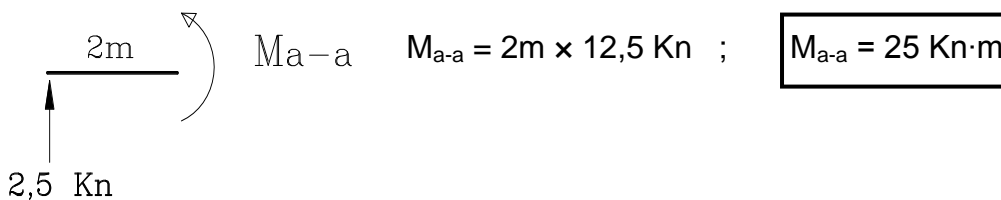
$\sum M_a = 0 \quad -3\text{m} \times 50 \text{ Kn} - 75 \text{ Kn} \times \text{m} + 6\text{m} \times B_y = 0 \quad \Rightarrow B_y = 37,5 \text{ Kn}$

$\sum F_y = 0 \quad A_y - 50 \text{ Kn} + 37,5 \text{ Kn} = 0 \quad \Rightarrow A_y = 12,5 \text{ Kn}$

Corte en a-a:

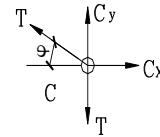
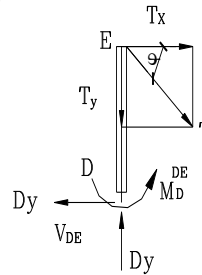
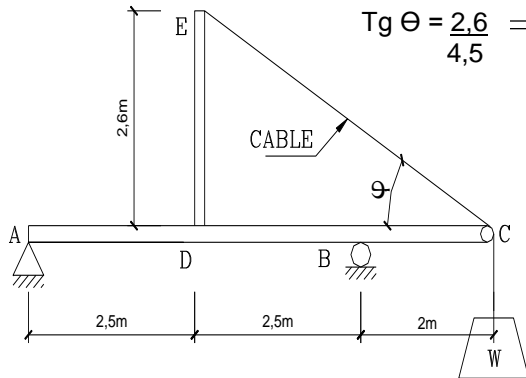


Momento Flector en a-a

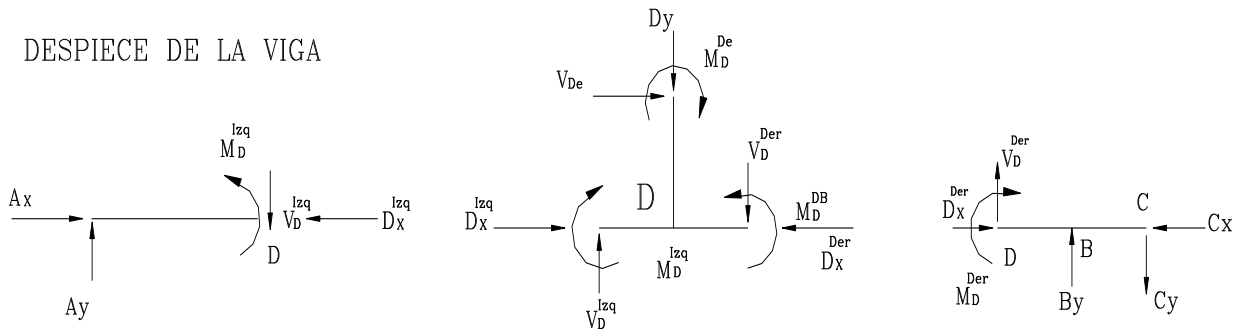


5.1.6- La viga de peso despreciable mostrada, representa un sistema de elevación, mediante un cable y una polea sin fricción en C, que levanta una carga  $W = 2.000 \text{ Kg}$ .

- Hacer el diagrama de cuerpo libre de cada barra.
- Encontrar el valor del Corte, Momento Flector y Fuerza Axial de la viga a la izquierda y derecha de "D".
- Encontrar el valor del Corte, Momento Flector y Fuerza Axial del miembro "DE".



DESPIECE DE LA VIGA



En la polea c, la tensión del cable es igual a W:

$$\sum F_x = 0 \quad C_x - T \times \cos 30^\circ = 0 \quad ; \quad C_x = 2.000 \text{ Kg} \times \cos 30^\circ = 1.732,0508 \text{ Kg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad C_y + T \times \sin \theta - T = 0 \quad ; \quad C_y = 1.000 \text{ Kg}$$

En el punto E:  $T_x = 2.000 \times \cos 30^\circ = 1.732,05 \text{ Kg}$

$$T_y = 2.000 \times \sin 30^\circ = 1.000 \text{ Kg}$$

En la barra DE:  $\sum F_y = 0 \quad D_y = T_y = 1.000 \text{ Kg}$

$$\sum F_x = 0 \quad V_{DE} = T_x = 1.732,05 \text{ Kg}$$

$$\sum M_D = 0 \quad M_D = 2,6m \times 1.732,05 \text{ Kg} = 4.503,33 \text{ Kg} - M$$

Calculamos las Reacciones Externas como una viga simplemente apoyada

$$\sum M_a = 0 \quad ; \quad -7m \times 2.000 \text{ Kg} + 5 B_y = 0 \Rightarrow B_y = 2.800 \text{ Kg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad A_y + B_y - 2.000 = 0 \Rightarrow A_y = -800 \text{ Kg}$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad A_x = 0$$

Con el tramo AD

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - D_x^{\text{Izq}} = 0 \Rightarrow \boxed{D_x^{\text{Izq}} = 0} \quad \text{No hay Fuerza Axial}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - V_D^{\text{Izq}} = 0 \Rightarrow \boxed{V_D^{\text{Izq}} = -800 \text{ Kg}} \quad \text{Corte negativo}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -2,5 \text{ m} A_y + M_D^{\text{Izq}} = 0 \Rightarrow M_D^{\text{Izq}} = 2,5 \text{ m} (-800 \text{ Kg}) \Rightarrow M_D^{\text{Izq}} = -2.000 \text{ Kg.m}$$

El Momento Flector es negativo contrario al positivo supuesto.

Con el Tramo DC

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_y^{\text{Der}} - C_x = 0 \Rightarrow \boxed{D_x^{\text{Der}} = 1.732,05 \text{ Kg}} \quad \text{Hay fuerza axial de compresión}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_D^{\text{Der}} + B_y - C_y = 0 \Rightarrow V_D^{\text{Der}} = C_y - B_y = 1.000 \text{ Kg} - 2.800$$

$$\boxed{V_D^{\text{Izq}} = -1.800 \text{ Kg}} \quad \text{El corte a la derecha es contrario al supuesto que era positivo}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -M_D^{\text{Der}} + 2,5 \text{ m} \times B_y - 4,5 \text{ m} \times C_y = 0 \Rightarrow \boxed{M_D^{\text{Der}} = 2.500 \text{ Kg.m}}$$

En estos casos el corte y el momento flector fueron asumidos positivos en el diagrama y colocados dentro de las fórmulas de estática como fuerzas de equilibrio.

Con el Miembro DE:

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad D_y - T_y = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = 1.000 \text{ Kg.f}} \quad \text{Fuerza Axial de compresión.}$$

$$\sum F_x = 0 \quad ; \quad T_x - V_{DE} = 0 \Rightarrow \boxed{V_{DE} = 1.732,05 \text{ Kg}} \quad \text{Corte horizontal}$$

$$\sum M_D = 0 \quad ; \quad M_D^{\text{DE}} - 2,6 \text{ m} \times T_x = 0 \Rightarrow \boxed{M_D^{\text{DE}} = 4.503,33 \text{ Kg.m}} \quad \text{Momento Flector}$$

Verificación del Equilibrio en el Nodo D

$$\sum F_x = 0 \quad D_x^{\text{Izq}} - D_x^{\text{Der}} + V_{DE} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - 1.732,05 + 1.732,05 = 0$$

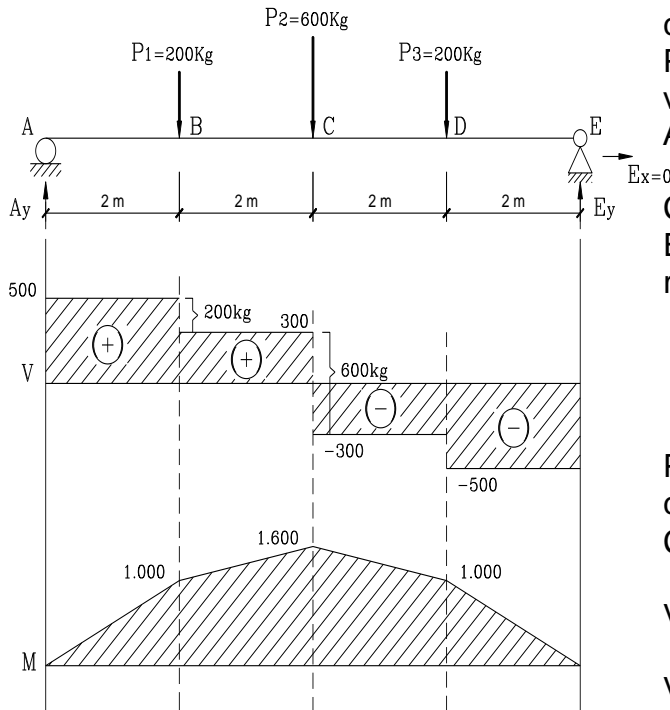
$$\sum F_y = 0 \quad V_D^{\text{Izq}} - V_D^{\text{Der}} - D_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -800 - (-1.800) - 1.000 = 0$$

$$\sum M_D = 0 \quad M_D^{\text{Der}} - M_D^{\text{Izq}} - M_D^{\text{Der}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.500 - (-2.000) - 4.503,33 \approx 0 *$$

- Debido a la aproximación de  $\Theta = 30^\circ$  en realidad es  $\Theta = 30,018367$

## DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN VIGAS.

5.2.1- Hacer el diagrama de Fuerza Cortante y de Momento Flector de la viga simplemente apoyada mostrada.



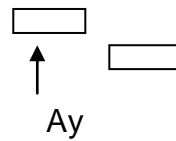
Definimos los tramos originados por las cargas puntuales, en este caso 4.

Por ser la viga simétrica de cargas verticales las reacciones externas son:

$$A_y = E_y = \sum F_i / 2 = 500 \text{ Kg}$$

Corte: Secuencia de izquierda a derecha.

El corte de arranque en A es el valor de la reacción, de signo +



Para todos los tramos: La relación entre carga y corte son:

Carga: 0  $\Rightarrow$  Pendiente: 0  $\Rightarrow$  Intensidad: cte

$$V_B^{\text{Izq}} = V_A + (\text{Área})_{\text{carga}}^{\text{AB}} = 500 + 0 = 500 \text{ Kg}$$

$$V_B^{\text{Der}} = V_B^{\text{Izq}} + P_1 = 500 - 200 = 300 \text{ Kg}$$

$$V_C^{\text{Izq}} = V_B^{\text{Der}} + (\text{Área})_{\text{carga}}^{\text{BC}} = 300 + 0 = 300 \text{ Kg}$$

$$V_C^{\text{Der}} = V_C^{\text{Izq}} + P_2 = 300 - 600 = -300 \text{ Kg}$$

Igual para los demás tramos.

Obsérvese que la carga puntual produce un salto en el diagrama de corte con el mismo valor de la carga; si la carga es negativa el escalón de la derecha baja y viceversa.

Momento Flector:

El Momento de arranque en A es cero, puesto que el apoyo articulado no genera momento, para los tramos AB y BC, la relación entre Corte y Momento son:

Corte: (+)  $\Rightarrow$  Pendiente: (+)  $\Rightarrow$  Intensidad: cte

$$M_B = M_A + (\text{Área})_{\text{corte}}^{\text{AB}} = 0 + 500 \times 2 = 1.000$$

$$M_C = M_B + (\text{Área})_{\text{corte}}^{\text{BC}} = 1.000 + 300 \times 2 = 1.600$$

Para los tramos CD y ED la relación entre Corte y momento son:

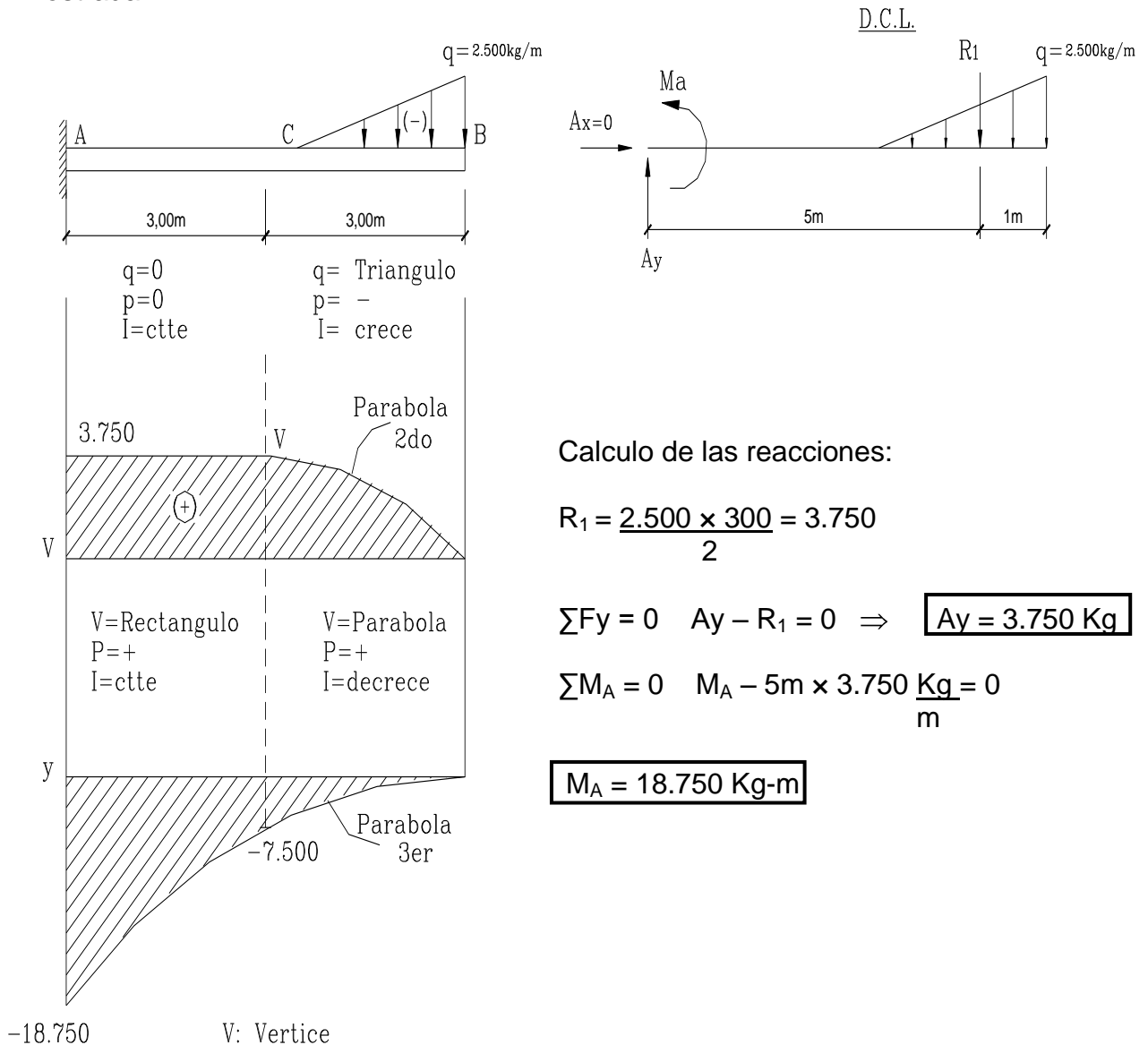
Corte: (-)  $\Rightarrow$  Pendiente: (-)  $\Rightarrow$  Intensidad: cte

$$M_D = M_C + (\text{Área})_{\text{corte}}^{CD} = 1.600 - 300 \times 2 = 1.000$$

$$M_E = M_D + (\text{Área})_{\text{corte}}^{DE} = 1.000 - 500 \times 2 = 0$$

Cuando no hay fuerzas tipo par, aplicadas en la viga, el diagrama de momentos no tiene saltos.

5.2.2- Trace los Diagramas de Corte y Momento Flector de la viga en cantiliver mostrada.



Calculo de las reacciones:

$$R_1 = \frac{2.500 \times 300}{2} = 3.750$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - R_1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 3.750 \text{ Kg}}$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A - 5m \times 3.750 \frac{\text{Kg}}{m} = 0$$

$$\boxed{M_A = 18.750 \text{ Kg-m}}$$

Corte:

Relación Carga – Corte

Tramo AC: Carga: 0 ⇒ Pendiente: 0 ⇒ Intensidad: ctte

Tramo CB: Carga: Triang ⇒ Pendiente: (-) ⇒ Intensidad: crece negativamente.

$$V_A: \text{Reacción: } 3.750 \text{ Kg}$$

$$V_C = V_A + (\text{Área})_{\text{carga}}^{\text{AC}} = 3.750 \text{ Kg} + 0 = 3.750 \text{ Kg}$$

$$V_B = V_C + (\text{Área})_{\text{carga}}^{\text{BC}} = 3.750 \text{ Kg} - 3.750 \text{ Kg} = 0$$

Momento:

Relación Corte – Momento

Tramo AC: corte: rectang ⇒ Pend: (+) ⇒ Intens.: ctte

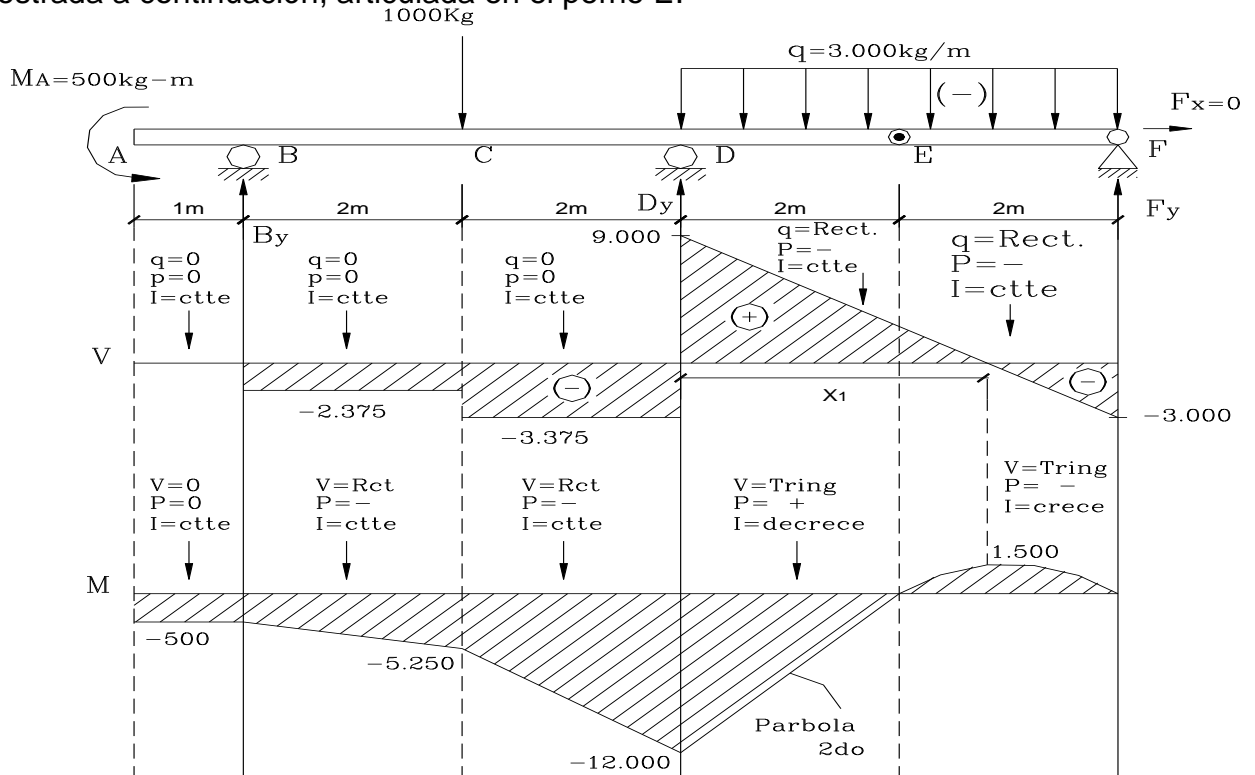
Tramo CB: corte: Parab. ⇒ Pend: (+) ⇒ Intens.: Decece.

$$M_A = -18.750 \text{ de signo negativo, visto como Momento Flector.}$$

$$M_C = M_A + (\text{Área})_{\text{corte}}^{\text{AC}} = -18.750 + 3.750 \times 3 = -7.500 \text{ Kg-m}$$

$$M_B = M_C + (\text{Área})_{\text{corte}}^{\text{CB}} = -7.500 + 2/3 \times (3.750 \times 3) = 0$$

5.2.3- Trace los diagramas de Fuerza Cortante y Momento Flector de la viga mostrada a continuación, articulada en el perno E.



Cálculo de Reacciones:

$$\text{Tramo EF: } \sum M_E = 0 \quad - 3.000 \times 2 \times 1 + 2 R_F = 0 \Rightarrow F_y = 3.000 \text{ Kg}$$

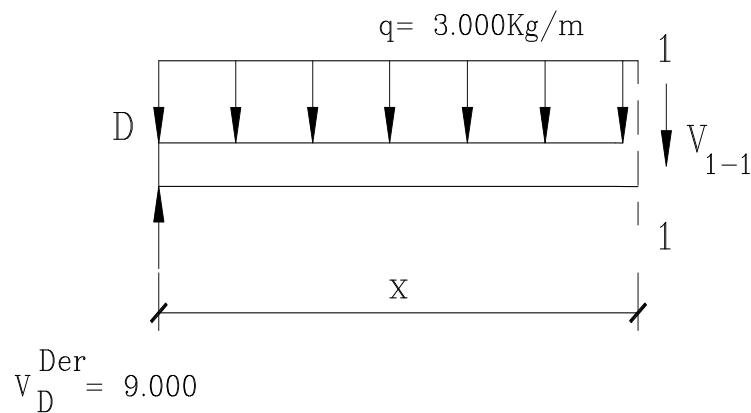
$$\text{Todo el sistema: } \sum M_B = 0 \quad 500 - 2 \times 1.000 - 6 \times 12.000 + 4 R_D + 8 \times 3.000 = 0 \\ \Rightarrow D_y = 12.375 \text{ Kg}$$

$$\text{Todo el sistema: } \sum F_y = 0 \quad B_y - 1.000 + 12.375 - 4 \times 3.000 + 3.000 = 0 \\ \Rightarrow B_y = - 2.375 \text{ Kg}$$

Calculo del corte cero en el punto "P" por dos métodos:

$$\text{- Por relación de triángulos: } \frac{9.000}{X_1} = \frac{3.000}{4 - X_1} \Rightarrow X_1 = 3\text{m}$$

- Por definición de Fuerza Cortante como la sumatoria de fuerzas a la izquierda:



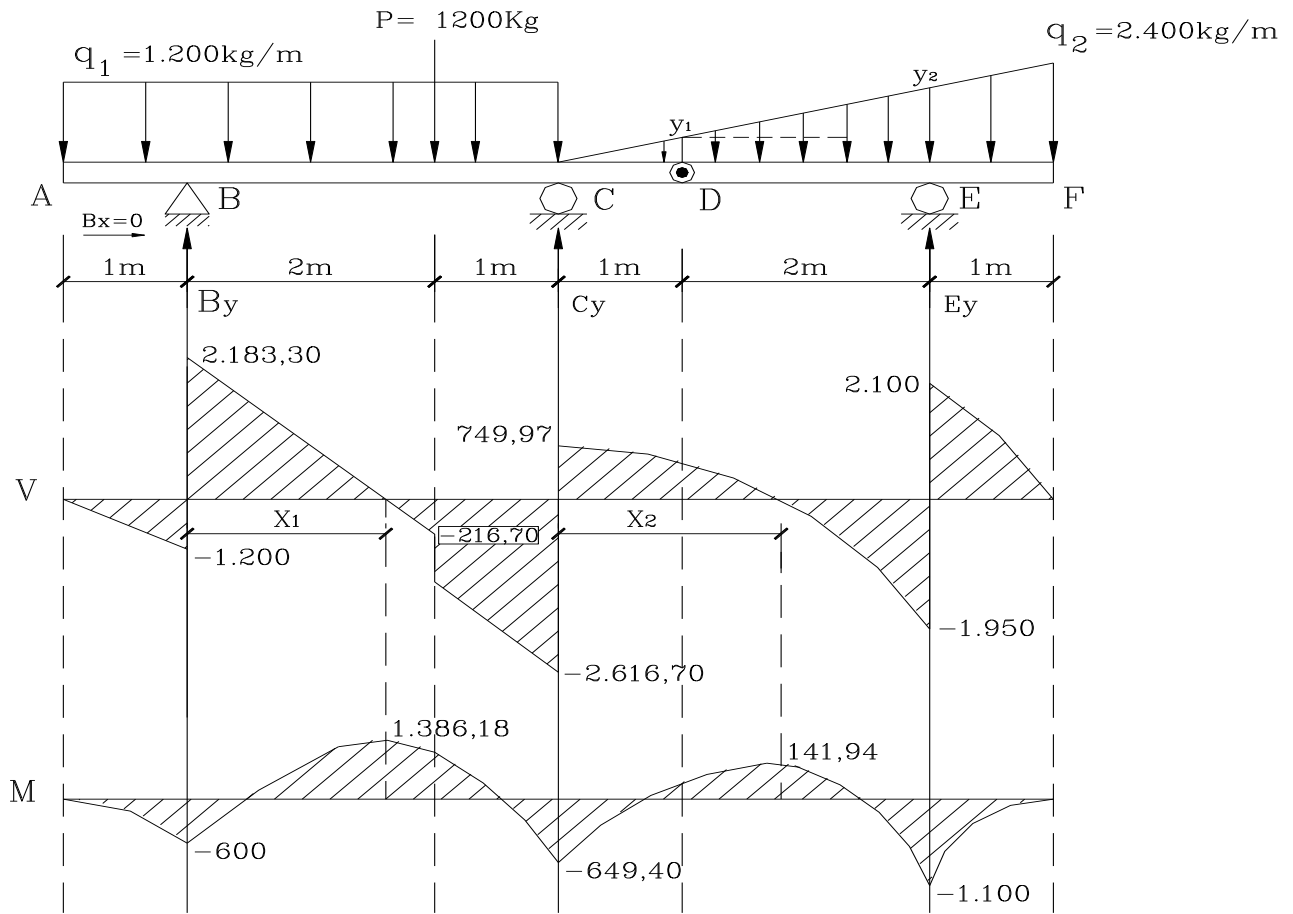
X: variable

$$V_{1-1} = 9.000 \text{ Kg} - (X) \cdot 3.000 \text{ Kg/m} = 0 \Rightarrow \boxed{X = 3\text{m}}$$

En los puntos de corte cero, el diagrama de Momento Flector presenta valores máximos, bien sea positivo o negativo.

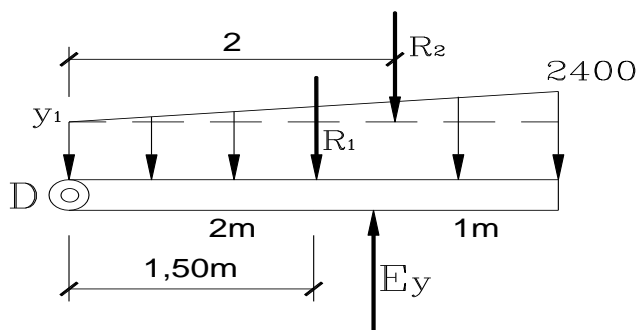


5.2.4- Trace los Diagramas de Corte y Momento Flector para la viga mostrada.



Reacciones:

Miembro D,E,F:



$$\frac{2.400}{4} = \frac{Y_1}{1} \Rightarrow Y_1 = \frac{2.400}{4} = 600 \text{ Kg/m}$$

$$R_1 = 3 \text{ m} \times 600 \text{ Kg/m} = 1.800 \text{ Kg}$$

$$R_2 = (2.400 - 600) \frac{\text{Kg}}{\text{m}} \times \frac{3 \text{ m}}{2} = 2.700 \text{ Kg}$$

$$\sum M_D = 0 \quad ; \quad 2 E_y - 1,50 \times R_1 - 2 \times R_2 = 0 \Rightarrow E_y = 4.050 \text{ Kg}$$

Todo el sistema:

$$\sum M_B = 0 - 4 \text{ m} \times 1.200 \times 1 \text{ m} - 2 \text{ m} \times 1.200 \text{ Kg} + 3 C_y - 4 \text{ m} \times 2.400 \text{ Kg/m} \times 5,67 \text{ m} + 6 E_y = 0$$

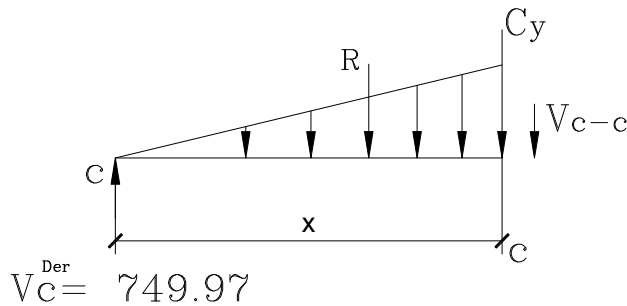
$$C_y = 3.366,67 \text{ Kg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad B_y - 4 \text{ m} \times 1.200 - 1.200 + C_y - \frac{4 \text{ m} \times 2.400 \text{ Kg/m}}{2} + E_y = 0 \Rightarrow B_y = 3.383,33 \text{ Kg}$$

Calculo del valor de la distancia  $X_1$ :

$$\frac{2.183,30}{X_1} = \frac{216,30}{2 - X_1} \Rightarrow \boxed{X_1 = 1.819 \text{ m}} \text{ (por relac. de triang.)}$$

Calculo del valor de la distancia  $X_2$ , por definición de fuerza cortante:



$X = \text{variable}$

Ecuación de la Recta:  $y = A - X$

$$Y = \frac{2.400}{4} \cdot X \Rightarrow Y = 600 X$$

$$R = \frac{X \cdot Y}{2} = \frac{X \cdot (600X)}{2} \Rightarrow R = 300 X^2$$

$$V_{c-c} = 0 \Rightarrow V_{c-c} = 749,97 - R = 749,97 - 300 X^2 = 0 \Rightarrow \boxed{X_2 = 1,58 \text{ m}}$$

5.2.5- Construya los Diagramas de Fuerza Cortante y Momento Flector de la viga de la fig. 5.2.5, tanto del elemento principal A-H, articulada en "B" y "F"; como del elemento secundario "DIJ".

Cálculo de reacciones: la fig. 5.2.5-b, muestra el diagrama de cuerpo libre.

Tramo A·B

$$\sum M_B = 0 \quad 500 \times 1,50 \times 0,75 - 1,5 R_A = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = 375}$$

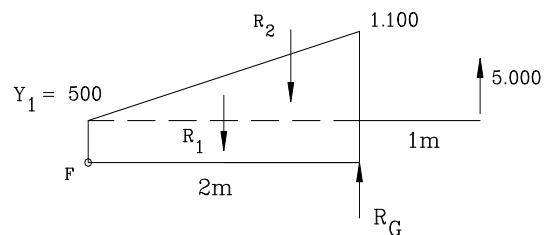
Tramo F – H :

$$\frac{900}{3} = \frac{\Delta y}{1} \Rightarrow \Delta y = 300 \quad Y_1 = 200 + 300 = 500$$

$$R_1 = 500 \times 2 = 1.000 \quad R_2 = 600 \times 2/2 = 600$$

$$\sum M_F = - 1.000 \times 1 - 600 \times \frac{2}{3} \cdot 2 + 2R_G + 3 \cdot 5000 = 0$$

$$\boxed{R_G = - 6.600 \text{ Kg}}$$



Todo el Sistema:

$$\sum M_C = 0$$

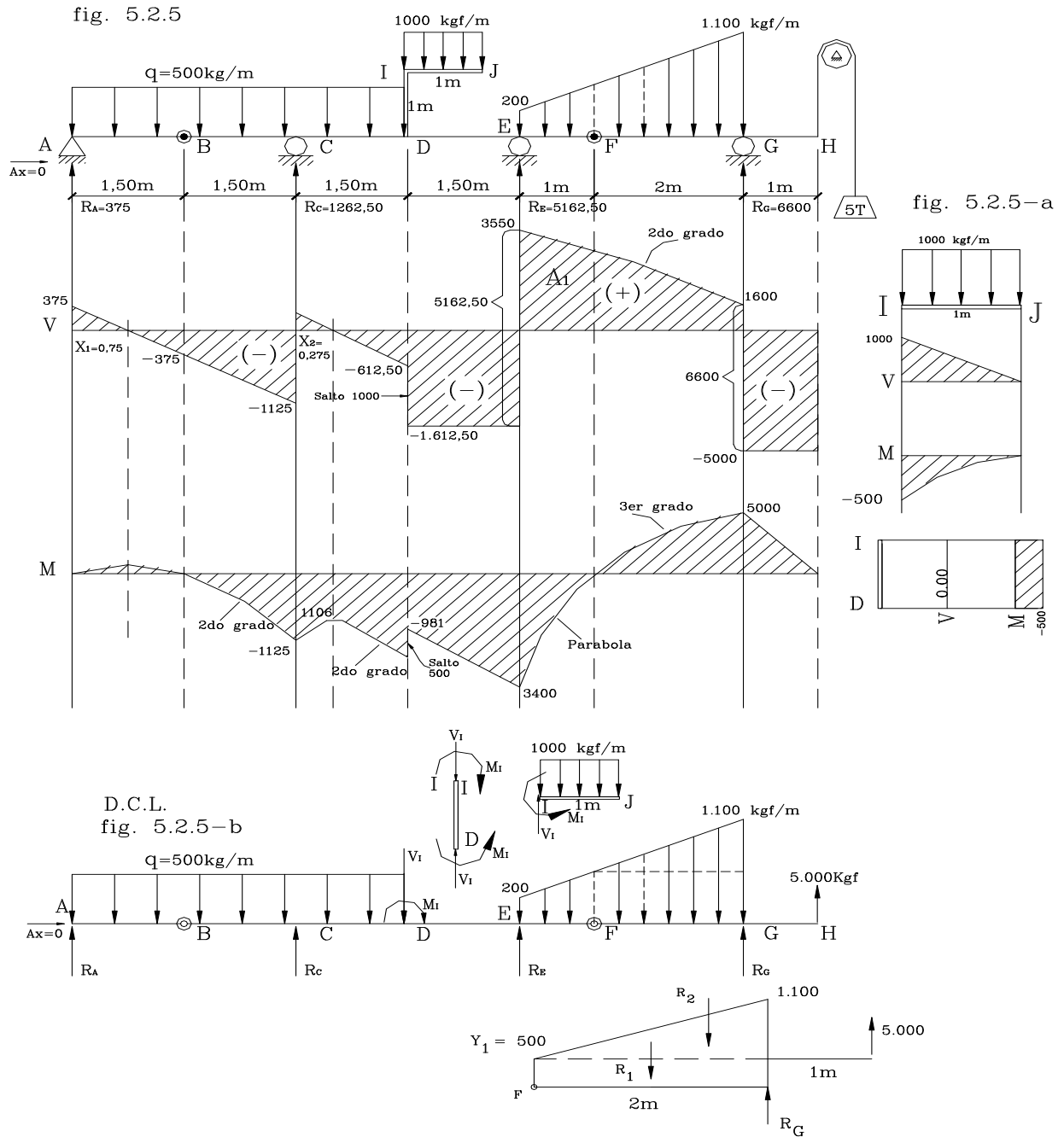
$$375 \times 3 + 500 \times 4,50 \times 0,75 - 1.000 \times 2 + 3R_E - 600 \times 4,50 - 1.350 \times 5 - 6.600 \times 6 + 7 \times 5.000 = 0$$

$$3 R_E - 1.5487,50 = 0 \Rightarrow R_E = 5.162,50 \text{ Kgf}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$375 - 2.250 + R_C - 1.000 + 5.162,50 - 600 - 1.350 - 6.600 + 5.000 = 0$$

$$R_C = 1.262,50 \text{ Kgf}$$

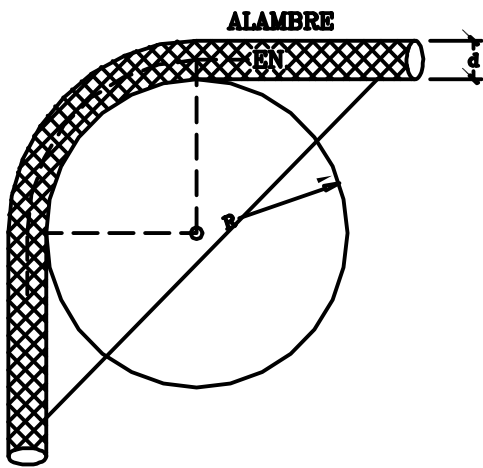


La fig. 5.2.5-b, muestra los diagramas de corte y momento del elemento secundario IJ, que no tiene fuerza cortante,  $V_1$  actúa en este miembro como fuerza axial de compresión.

## PROBLEMAS DE ESFUERZOS EN VIGAS.

### ÁLCULO DE ESFUERZO NORMAL Y CORTANTE EN VIGAS.

6.1.1- Calcular el Momento Flexionante y el esfuerzo de flexión máximo, de un alambre de diámetro  $d = 2 \text{ mm}$ , si se dobla sobre un cilindro de diámetro  $D = 40 \text{ cm}$ , considere  $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$



El radio del eje neutro será:

$$\rho = r + \frac{d}{2} = \frac{40}{2} \text{ cm} + \frac{0,2}{2} \text{ cm} = 20,1 \text{ cm}$$

La deformación unitaria máxima en el borde del alambre (fibras a).

$$\epsilon = \frac{Y}{\rho} = \frac{0,1 \text{ cm}}{20,1 \text{ cm}} = 0,004975$$

El Momento Flector será:

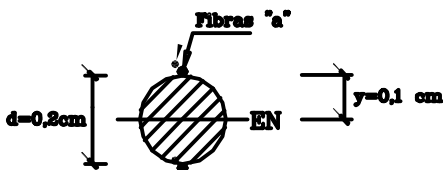
$$M = \frac{E \cdot I_{EN}}{\rho} = \frac{2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 \times 0,00007854 \text{ cm}^4}{20,10 \text{ cm}}$$

$$M = 7,81 \text{ Kg} - \text{cm}$$

El esfuerzo normal máximo por Flexión:

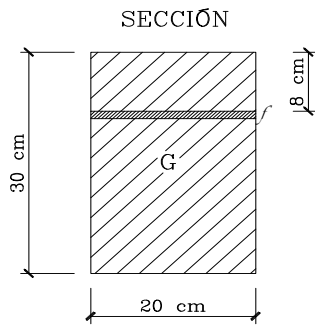
$$\sigma = E \cdot \epsilon = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \times 0,004975$$

$$\sigma = 9.950 \text{ Kg/cm}^2$$

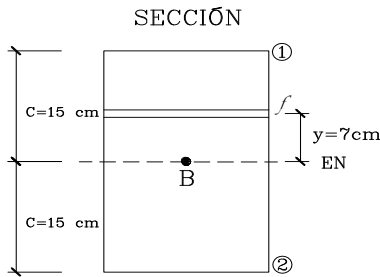


6.1.2 Para la sección transversal de una viga rectangular, tal como se muestra en la figura siguiente, el Momento Flector es de  $M=2.800 \text{ Kg-m}$  y la Fuerza Cortante es  $V=7.800 \text{ Kg}$ , con cargas verticales. Calcular:

- El esfuerzo máximo normal por flexión.
- El esfuerzo normal por flexión en la fibra "f"
- El máximo esfuerzo cortante.
- El valor del esfuerzo cortante en la fibra "f".
- Dibuje los diagramas de esfuerzo normal y cortante ( $\sigma$  y  $T$ ).



Colocamos el eje neutro en el centro geométrico de la sección, y debido a que las cargas son verticales, el eje neutro es horizontal según el eje Z.



a. El esfuerzo máximo normal ocurre en las fibras más alejadas del eje neutro ① y ②, en la fórmula de flexión  $y = c$

$$\sigma_{\text{①}} = \frac{M \cdot C}{I_{\text{EN}}} = \frac{2.800 \text{ Kg} - \text{m} \times 100 \text{ cm/m} \times 15 \text{ cm}}{45.000 \text{ cm}^4}$$

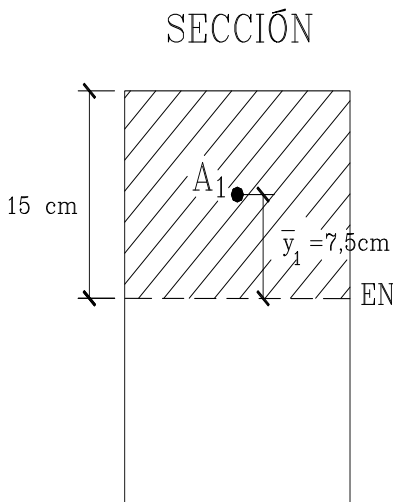
$$\sigma_{\text{①}} = 93,33 \text{ Kg/cm}^2$$

$$I_{\text{E}} = \frac{20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}^3}{12} = 45.000 \text{ cm}^4$$

b. En la fibra "f" la distancia "y" de la fórmula de flexión es 7 cm.

$$\sigma_{\text{F}} = \frac{2.800 \text{ kg} - \text{m} \times 100 \text{ cm/m} \times 7 \text{ cm}}{45.000 \text{ cm}^4} \Rightarrow \sigma_{\text{F}} = 43,56 \text{ kg/cm}^2$$

c- El Esfuerzo Cortante máximo ocurre en el eje neutro, por lo tanto el área que produce el momento estático es la zona rayada indicada en la figura siguiente:



$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{EN}} = \frac{V \cdot Me}{I_{\text{EN}} \cdot t} = \frac{7.800 \text{ Kg} \times 2.250 \text{ cm}^3}{45.000 \text{ cm}^4 \times 20 \text{ cm}}$$

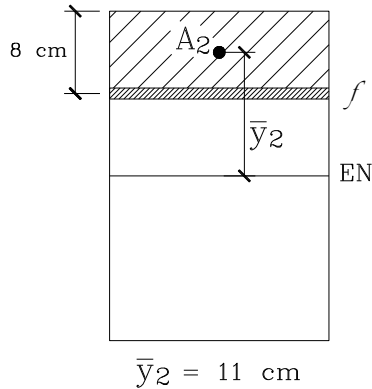
$$\tau_{\text{max}} = 19,50 \text{ Kg/cm}^2$$

$t = 20 \text{ cm}$  (ancho de la zona cortada)

$$Me = \sum A_i \cdot \bar{Y}_i$$

$$Me = A_1 \times \bar{Y}_1 = 15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm} = 2.250 \text{ cm}^3$$

d. En la fibra "f", el área que produce Momento Estático o de primer orden esta por encima de dicha fibra, como se muestra:



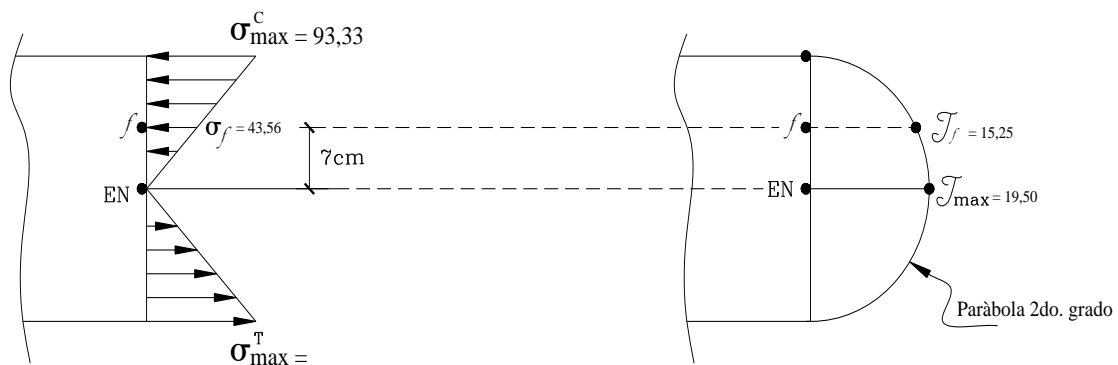
$$M_e = A_2 \cdot \bar{Y}_2 = 8 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 11 \text{ cm} = 1.760 \text{ cm}^3$$

$$\tau_f = \frac{7.800 \text{ Kg} \times 1.760 \text{ cm}^3}{45.000 \text{ cm}^4 \times 20 \text{ cm}} \Rightarrow \tau_f = 15,25 \text{ Kg/ cm}^2$$

e. Los gráficos de  $\sigma$  y  $\tau$  son los siguientes:

Grafico de  $\sigma$

Grafico de  $\mathcal{J}$

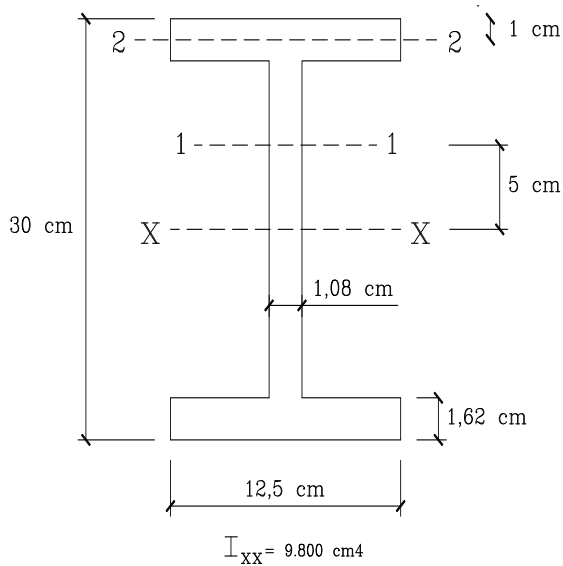


Como el momento es positivo las fibras comprimidas están arriba y las traccionadas abajo, tal como se refleja en el diagrama de la izquierda.

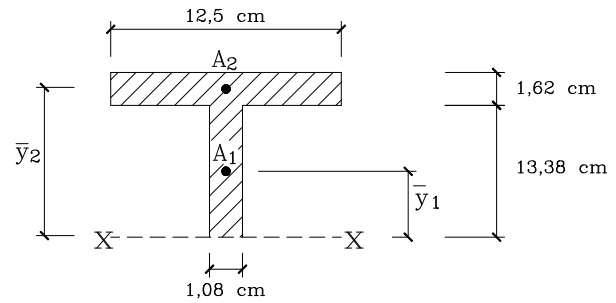
La gráfica de esfuerzo cortante a la derecha es una parábola de segundo grado cuyo valor máximo ocurre en el eje neutro, y se hace nula en las caras superior e inferior de la viga.

6.1.3- Para la Viga IPE 300 mostrada a continuación, sometida a un corte vertical de 15 ton, determine el valor del flujo cortante en los siguientes puntos:

- a. En el eje neutro
- b. En la sección 1-1
- c. En la sección 2-2



a. En el eje neutro ocurre el máximo valor de “ $\tau$ ” y el área rayada produce el momento estático.



$$Me = A_1 \cdot \bar{Y}_1 + A_2 \cdot \bar{Y}_2$$

$$Me = 1,08 \times 13,38 \times 6,69 + 12,5 \times 1,62 \times 14,19$$

$$Me = 384,02 \text{ cm}^3$$

$$\bar{Y}_1 = 13,38/2 = 6,69 \text{ cm}$$

$$\bar{Y}_2 = 15 - 1,62/2 = 14,19 \text{ cm}$$

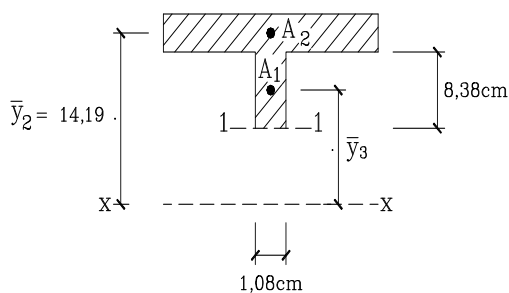
$$\tau_x = \frac{15.000 \text{ Kg} \times 384,02 \text{ cm}^3}{9.800 \text{ cm}^4 \times 1,08}$$

$$\tau_x = 544,25 \text{ Kg/cm}^2$$

Debido a que casi todo el Esfuerzo Cortante lo soporta el alma, una forma de cálculo aproximada es:

$$\tau_x = \tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{alma}}} = \frac{15.000}{(30 - 2 \times 1,62) \times 1,08} = 519,03 \text{ Kg/m}^2$$

b. El corte en 1-1 será:



$$\tau_{1-1} = \frac{15.000 \text{ Kg} \times 370,52 \text{ cm}^3}{9.800 \text{ cm}^4 \times 1,08}$$

$$\tau_{1-1} = 525,11 \text{ Kg/cm}^2$$

$$Y_3 = \frac{8,38 \text{ cm}}{2} + 5 \text{ cm} = 9,19 \text{ cm}$$

$$Me^{1-1} = 1,08 \times 8,38 \times 9,19 + 12,5 \times 1,62 \times 14,19$$

$$Me^{1-1} = 370,52 \text{ cm}^3$$

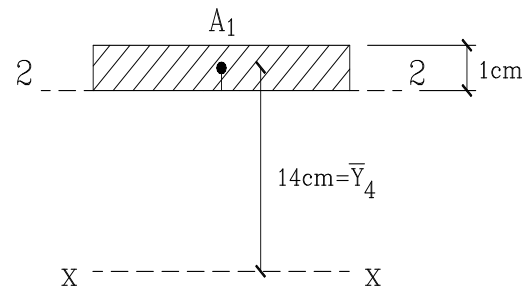
c- el corte en la sección 2-2 será:

Momento estático del área rayada:

$$Me = A_1 \cdot \bar{Y}_4$$

$$Me = 12,5\text{cm} \times 1\text{cm} \times 14\text{cm}$$

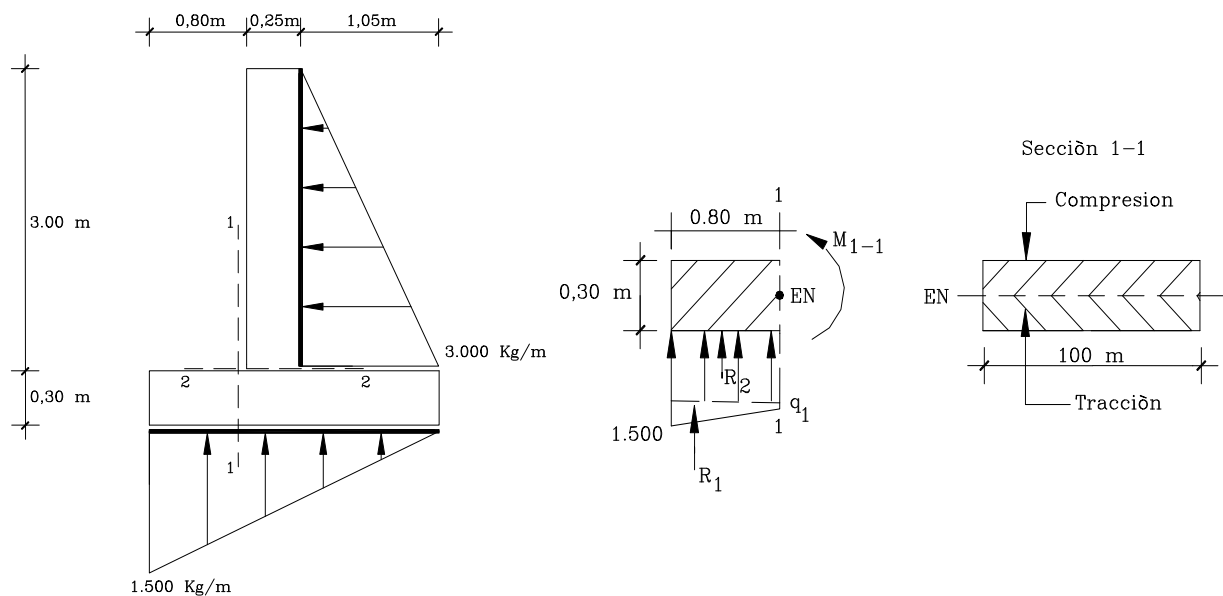
$$Me = 175 \text{ cm}^3$$



$$\tau_{2-2} = \frac{15.000\text{Kg} \times 175\text{cm}^3}{9.800 \text{ cm}^4 \times 12,5\text{cm}} = 21,43$$

$\tau_{2-2} = 21,43 \text{ Kg/ cm}^2$

6.1.4- El Muro en cantiliver mostrado esta en equilibrio, calcule los esfuerzos normales de flexión máximos en las secciones 1-1 y 2-2 por metro de largo, considerando solo las fuerzas de empuje de tierra "E" y presión de contacto sobre el terreno "q" mostradas.



Para la sección 1-1, se muestra el DCL a la derecha.

Calculamos el valor de  $q_1$

$$\frac{1.500}{2,10} = \frac{q_1}{1,30} \Rightarrow q_1 = 928,57 \text{ Kg/m}$$

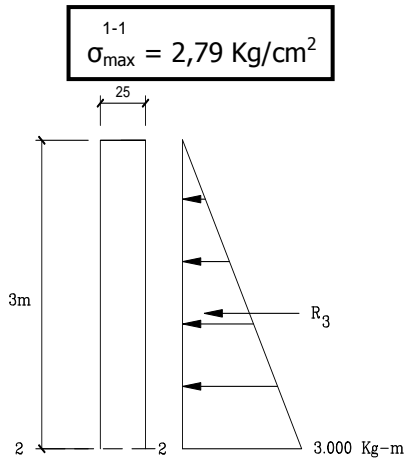
$$M_{1-1} = R_1 \cdot b_1 + R_2 \cdot b_2$$



$$M_{1-1} = (1.500 - 928,57) \times \frac{0,80}{2} \times \frac{2}{3} \times 0,80 + 928,57 \times 0,80 \times 0,40$$

$$M_{1-1} = 419,05 \text{ Kg} - \text{m} = 41.905 \text{ Kg} - \text{cm}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max} = \sigma_{\max} = \frac{41.905 \text{ Kg-cm} \times 15 \text{ cm}}{100 \text{ cm} \times 303 \text{ cm}} \times 12$$

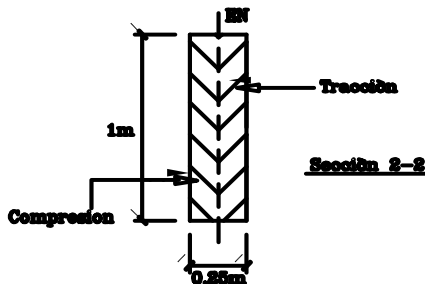


Para la sección 2-2

$$M_{2-2} = R_3 \cdot b_3 = \frac{3\text{m}}{2} \times 3.000 \text{ Kg-m} \times \frac{1 \cdot 3\text{m}}{3}$$

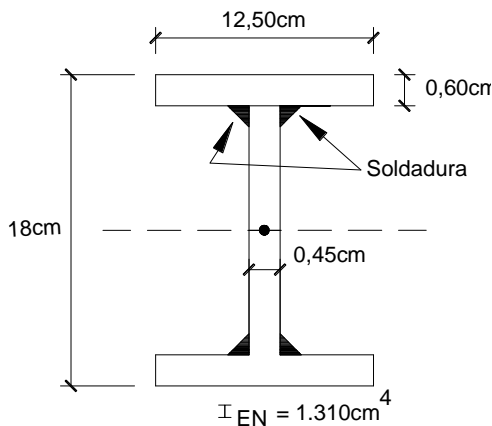
$$M_{2-2} = 4.500 \text{ Kg} - \text{m} = 450.000 \text{ Kg} - \text{cm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{450.000 \text{ Kg} - \text{cm} \times 12,5 \text{ cm}}{100 \text{ cm} \times 2,53 \text{ cm}} \times 12$$



$$\sigma_{\max} = 43,20 \text{ Kg/cm}^2$$

6.1.5-Para un perfil Properca VP 180 x 17.7, determine cual es el valor máximo de fuerza cortante que puede soportar, si los esfuerzos admisibles del acero y soldadura son los siguientes:  $\tau_{\text{acero}} = 1.100 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\tau_{\text{sold}} = 900 \text{ Kg/cm}^2$ . Considere un ancho efectivo sometido a corte de 3 mm. por cada soldadura.



Para el caso del Esfuerzo Cortante en el acero, la zona de mayor esfuerzo ocurre en el eje neutro, por lo que afecta el alma de la viga.

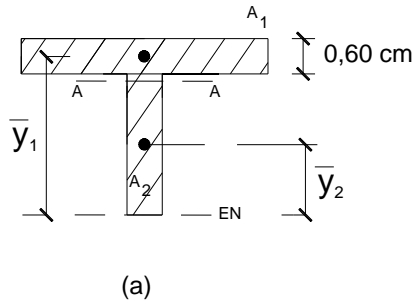
Considerando el área rayada de la Fig. a de abajo, el momento de 1er orden respecto al eje nuestro será.

EN

$$M_e = A_1 \cdot \bar{Y}_1 + A_2 \cdot \bar{Y}_2$$

EN

$$M_e = 12,5 \times 0,60 \times \left(9 - \frac{0,60}{2}\right) + 0,45 \times \left(\frac{9 - 0,60}{2}\right)^2$$



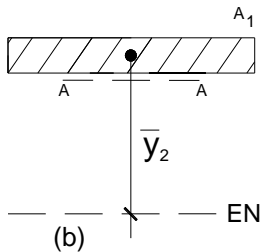
$$Me^{EN} = 81,13 \text{ cm}^3$$

El Esfuerzo Cortante actuante en el EN será:

$$\tau_{EN}^{ACT} = \frac{V \times Me^{EN}}{I_{EN} \cdot t} \Rightarrow V = \frac{T_{EN}^{ACT} \cdot I_{EN}^{ACT} \cdot t}{Me^{EN}}$$

Para encontrar el valor máximo de V, sustituimos el esfuerzo actuante por el admisible.

$$V_{MAX}^1 = \frac{1.100 \times 1.310 \times 0,45}{81,13} = 7.992,73 \text{ Kg}$$



Para el caso del Esfuerzo Cortante en la soldadura, este se produce en la Sección A-A, y el Momento estático es producido por el área rayada de la Fig b. El flujo cortante será:

$$F = \tau_{Sold} \cdot 2 \times 0,3 \text{ cm} = 900 \text{ Kg/cm}^2 \times 0,6 \text{ cm} = 540 \text{ Kg/cm}$$

$$Me^{A-A} = A_1 \times \bar{Y}_1 = 12,5 \times 0,60 \times (9 - \frac{0,60}{2}) = 65,25 \text{ cm}^3$$

$$V_{MAX}^2 = \frac{F \times I_{EN}}{Me^{A-A}} = \frac{540 \times 1.310}{65,25} = 10.841,38 \text{ Kg}$$

El máximo valor de Corte vertical que resiste el perfil es  $V_{MAX}^1 = 7.992,73 \text{ Kg}$ , determinado en el alma.

6.1.6- La viga mostrada a continuación esta compuesta por tres tablonos de madera pegados entre si, de manera muy firme, como se muestra en la figura, si se considera que el pegamento soporta un esfuerzo de adherencia de  $3 \text{ Kg/cm}^2$ , y la madera tiene los siguientes esfuerzos admisibles:

$$\tau_m = 5 \text{ Kg/cm}^2, \sigma_m^{comp} = 85 \text{ Kg/cm}^2, \sigma_m^{tracc} = 100 \text{ Kg/cm}^2.$$

a- Verifique si la viga soporta la carga señalada por Esfuerzo normal de Flexión.

- b- Verifique si la viga soporta la carga señalada por Esfuerzo Cortante.
- c- ¿Cual será el máximo valor de “q” que se puede aplicar a la viga, considerando todos los valores de esfuerzo admisibles dados?

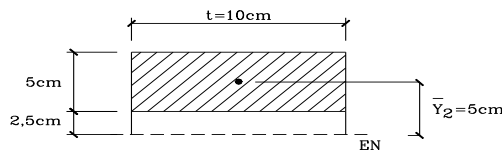
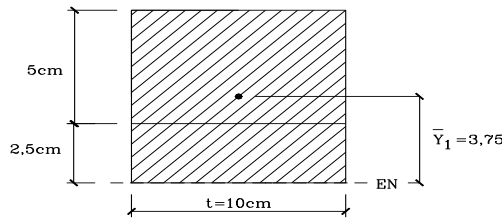
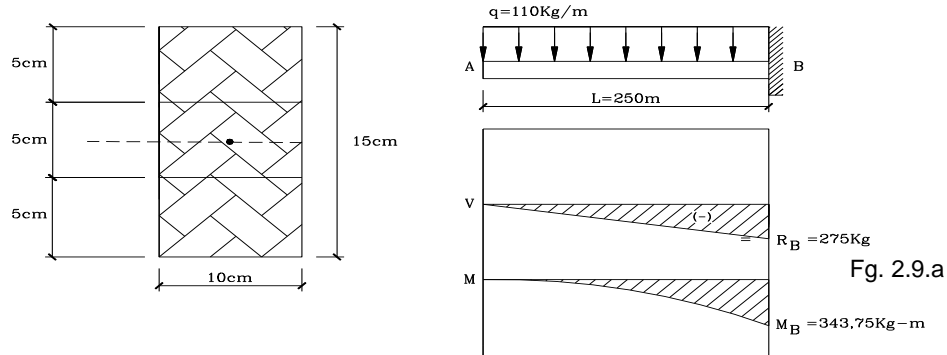


fig 2.9.c

$$I_{EN} = \frac{10 \times 15^3}{12} = 2.812,5 \text{ cm}^4 \text{ (Total)}$$

a - Primero dibujamos los diagramas de Corte y Momento (fig 2.9.a) para conocer los valores de Fuerzas máximas aplicadas a las vigas.

Ahora calculamos los esfuerzos actuantes normales a tracción y compresión por flexión y los comparamos con los admisibles. La Inercia de la sección se calcula respecto al eje neutro que esta en el centroide de la figura.

$$\sigma_{act}^t = \sigma_{act}^c = \frac{M \cdot Y}{I_{EN}} = \frac{343,75 \times 100 \times 7,5}{\frac{10 \times 15^3}{12}} = 91,67 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{adm}^t = 100 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} > \sigma_{act}^t = 91,67 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \text{ Si cumple}$$

$$\sigma_{adm}^C = 85 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} < \sigma_{act}^C = 91,67 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \quad \text{No Resiste a compresión}$$

b- Para verificar por corte, hay dos puntos críticos que estudiar:

- Primero, el corte máximo que ocurre en el eje neutro y que es soportado por el tablón de la madera:

El Momento estático que genera este flujo cortante es el área rayada 2.9.b, el esfuerzo cortante actuante en esta zona será:

$$\tau_{EN} = \frac{V \cdot Me}{I \cdot t} = \frac{275 \times (7,5 \times 10) \times 3,75}{\frac{10 \times 15^3}{12} \times 10} = 2,75 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Lo comparamos ahora con el Esfuerzo Cortante admisible de la madera.

$$\tau_m = 5 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} > \sigma_{EN} = 2,75 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \quad \text{Si cumple}$$

- Otro punto crítico lo genera el pegamento, para el cual hay que verificar el flujo cortante a la altura de 2,5 cm, con el área rayada 2.9.c:

$$\tau_{2,5} = \frac{275 \times (5 \times 10) \times 5}{\frac{10 \times 15^3}{12} \times 10} = 2,44 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Ahora lo comparamos con el Esfuerzo Cortante admisible del pegamento:

$$\tau_P = 3 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} > \tau_{2,5} = 2,44 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \quad \text{Si cumple}$$

La viga soporta la carga por corte

c. Cada uno de los Esfuerzos admisibles, genera una carga “q” máxima posible para colocar:

- Por Esfuerzo normal de Flexión: el más crítico es la compresión:

$$\sigma_m^{comp} = 85 \geq \frac{M_1 \times 7,5}{2.812,50} \Rightarrow M_1 \leq \frac{85 \times 2812,50}{7,5} = 31.875 \text{ Kg} - \text{cm}$$

Como  $M_1$  en el empotramiento es:  $M_1 \geq q_1 \times \frac{2,5^2}{2}$

$$q_1 \leq \frac{2 \times 31.875}{2,5^2} = 10.200 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}} = 102 \frac{\text{Kg}}{\text{m}} \Rightarrow \boxed{q_1 \leq 102 \frac{\text{kg}}{\text{m}}}$$

- Por corte en el eje neutro, el esfuerzo cortante será:

$$\tau_m = 5 \geq \frac{V_1 \times M_e}{I_{EN} \cdot t} \Rightarrow V_1 \leq \frac{5 \times 2.812,50 \times 10}{(7,5 \times 10 \times 3,75)} = 500 \text{ Kg}$$

El corte en el empotramiento es:  $V_1 = q_2 \times 2,5$

$$q_2 \leq \frac{500 \text{ kg}}{2,5 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{q_2 \leq 250 \text{ kg/m}}$$

- Por corte en el pegamento:

$$\tau_P = 3 \geq \frac{V_2 \times M_e}{6 I_{EN} \cdot t} \Rightarrow V_2 \leq \frac{3 \times 2.812,50 \times 10}{(5 \times 10 \times 5)} = 337,50 \text{ Kg}$$

$$V_2 = q_3 \times 2,5$$

$$q_3 \leq \frac{337,50 \text{ Kg}}{2,5} \Rightarrow \boxed{q_3 \leq 135 \text{ Kg/m}}$$

La carga máxima que se puede aplicar a la viga, es la menor de las tres, para que no haga fallar a ninguna de las tres condiciones:

$$\boxed{q_{\max} = q_1 = 102 \text{ Kg/m}}$$

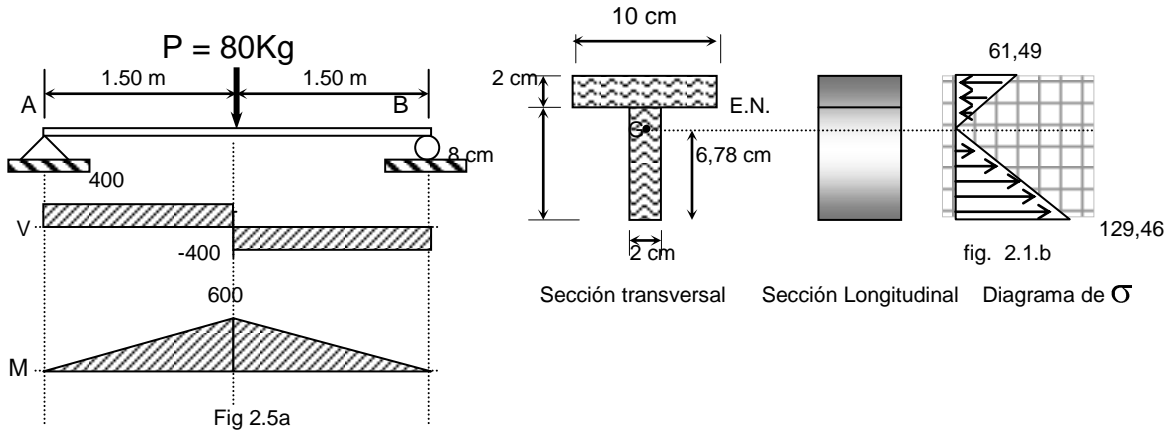
6.1.7- En la viga de madera mostrada a continuación:

- Hacer el diagrama de corte y momento flector.
- Encuentre los esfuerzos máximos de tracción y compresión en la sección
- Dibuje el diagrama de esfuerzos anterior.
- Si se establecen los siguientes valores de esfuerzos admisibles.

$\sigma^{\text{compr}} = 65 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\sigma^{\text{tracc}} = 40 \text{ Kg/cm}^2$ ; cual será el máximo valor de "P" que se puede aplicar sobre la viga.

- Con la carga  $P = 80 \text{ Kg}$ , encuentre el máximo valor de esfuerzo cortante en la sección, señale donde se produce.

f. Si el Ala y el Alma de la viga se unen mediante un pegamento especial que soporta un esfuerzo cortante de  $\tau = 20 \text{ Kg/cm}^2$ . Determine si la viga puede soportar la carga "P" colocada inicialmente.

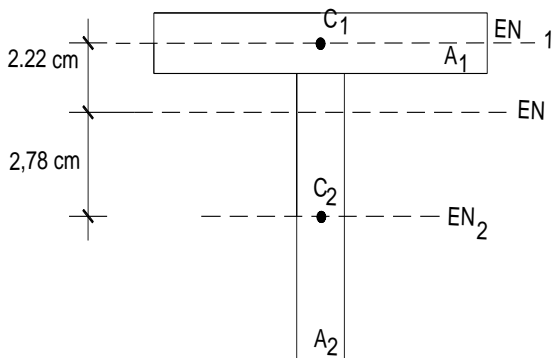
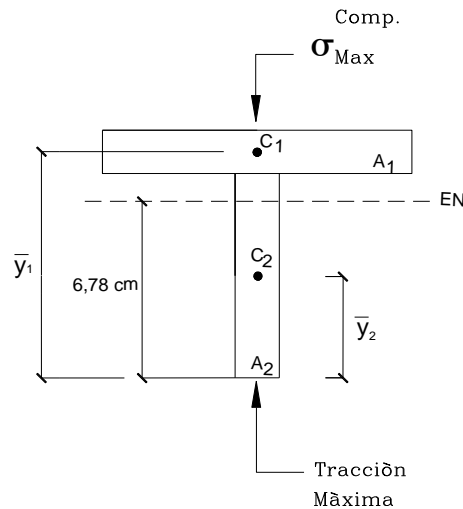


a. En la figura 2.5.a

b. Cálculo del centroide:

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \cdot \bar{Y}_i}{\sum A_i} = \frac{10 \times 2 \times 9 + 2 \times 8 \times 4}{2 \times 10 + 2 \times 8}$$

$$\bar{Y} = 6,78 \text{ cm}$$



Momento de Inercia centroidal:

$$I_{EN} = I_{A1} + I_{A2}$$

$$I_{EN} = I_c A_1 + A_1 d_1^2 + I_c A_2 + A_2 d_2^2$$

$$I_{EN} = \frac{10 \times 2^3}{12} + 2 \times 10 \times 2,22^2 + \frac{2 \times 8^3}{12} + 2 \times 8 \times 2,78^2$$

$$I_{EN} = 314,22 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\max}^T = \frac{60 \times 100 \times 6,78}{314,22} = 129,46 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\max}^C = \frac{60 \times 100 \times 3,22}{314,22} = 61,49 \text{ Kg/cm}^2$$

c. El diagrama de esfuerzo se muestra en la fig 2.1.b, la compresión esta arriba y la tracción abajo.

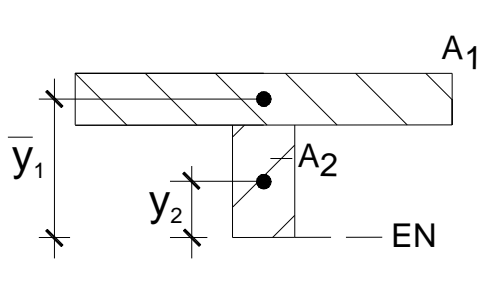
d.  $M_{\max} = \frac{P}{2} \times 150 \text{ cm}$ ,

$$\sigma_{\text{ADM}}^{\text{C}} = 65 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \geq \frac{\frac{P_{\text{C}}}{2} \cdot 150 \times 3,22}{314,22} \Rightarrow P_{\text{C}} \leq 84,57 \text{ Kg}$$

$$\sigma_{\text{ADM}}^{\text{T}} = 40 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \geq \frac{\frac{P_{\text{T}}}{2} \cdot 150 \times 6,78}{314,22} \Rightarrow P_{\text{T}} \leq 24,72 \text{ Kg}$$

La máxima carga que se le puede aplicar a la viga, es la menor de los dos  $P_{\text{T}} = 24,72 \text{ Kg}$ . Por lo tanto la viga no soporta la carga aplicada inicialmente de 80 Kg.

e. El corte máximo ocurre en el eje neutro:

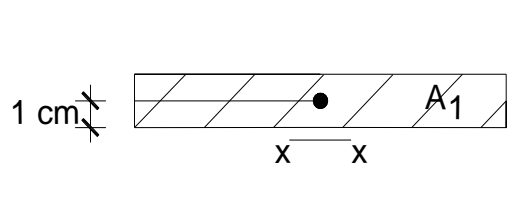


$$A_1 \quad Me^{\text{EN}} = A_1 \cdot \bar{Y}_1 + A_2 \cdot \bar{Y}_2$$

$$Me^{\text{EN}} = 2 \times 10 \times 2,22 + 2 \times 1,22 \times \frac{1,22}{2} = 45,89 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot Me}{I \cdot t} = \frac{40 \times 45,89}{314,22 \times 2} = 2,92 \text{ Kg/cm}^2$$

f. El corte a la altura del pegamento lo genera el área  $A_1$ , por lo tanto el Momento Estático será:



$$Me^{\text{X-X}} = A_1 \cdot \bar{Y}_1 = 2 \times 10 \times 2,22 = 44,4 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{\text{X-X}} = \frac{40 \times 44,4}{314,22 \times 2} = 2,83 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Comparando:  $\tau_{\text{ADM}} = 2 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} < \tau_{\text{X-X}} = 2,83 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  No soporta